

Application aux équations aux dérivées partielles d'une méthode par point fixe et le problème des deux puits

THÈSE N° 6693 (2015)

PRÉSENTÉE LE 9 OCTOBRE 2015

À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE BASE

CHAIRE D'ANALYSE MATHÉMATIQUE ET APPLICATIONS

PROGRAMME DOCTORAL EN MATHÉMATIQUES

ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES

PAR

Sébastien BASTERRECHEA

acceptée sur proposition du jury:

Prof. T. Mountford, président du jury
Prof. B. Dacorogna, directeur de thèse
Dr O. Kneuss, rapporteur
Prof. P. Marcellini, rapporteur
Prof. M. Picasso, rapporteur



ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

Suisse
2015

Résumé

Cette thèse est constituée de deux parties. La première traitera d'une variante du théorème du point fixe de Banach et de ses applications à diverses équations aux dérivées partielles (EDP) ayant la forme abstraite

$$\mathcal{L}u + \mathcal{Q}(u) = f.$$

Le résultat principal de cette première partie affirme qu'une équation de cette forme admet une solution u , si la donnée f satisfait une certaine condition de petitesse. Ce résultat, que nous nommerons *la méthode du point fixe*, a l'avantage d'être relativement simple à utiliser et peut s'appliquer à une large variété d'EDP ; cependant l'existence de solutions n'est garantie que pour des données « petites ». Les équations qui seront traitées dans cette thèse sont les équations jacobiniennes, les équations elliptiques non-linéaires, des problèmes de transport et l'équation des ondes semi-linéaire.

La seconde partie de la thèse traitera du *problème des deux puits* en dimension deux

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour le cas non-dégénéré $\det(A), \det(B) \neq 0$, nous montrons un résultat de non-existence de solutions régulières par morceaux si A et B sont non-orthogonales. Pour les cas dégénéré et semi-dégénéré, nous donnerons une caractérisation de l'enveloppe rang-un connexe de $\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$ ainsi que plusieurs résultats d'existences de solutions lipschitziennes et affines par morceaux. Enfin, pour les trois cas, nous construirons explicitement plusieurs solutions non-triviales pour des conditions de bord u_0 bien choisies.

Mots-clés : point-fixe, équations aux dérivées partielles, équations elliptiques, équation de Monge-Ampère, équations hessiennes, équation des ondes, problème des deux puits, enveloppe rang-un convexe.

Abstract

This thesis consists of two parts. The first part is about a variant of Banach's fixed point theorem and its applications to several partial differential equations (PDE's), abstractly of the form

$$\mathcal{L}u + \mathcal{Q}(u) = f.$$

The main result of this first part asserts that an equation having this form admits a solution u if the datum f satisfies a certain smallness assumption. This result (we call it *the fixed point method*) is relatively simple to use and can be applied to a large variety of PDE's. The downside is that it guarantees the existence of solutions only for "small" data. The equations we deal with are Jacobian equations, non-linear elliptic PDE's, transport problems and the semi-linear wave equation.

The second part of the thesis treats the *two well problem* in two dimensions

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{almost everywhere in } \Omega \\ u = u_0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases}$$

For the non-degenerate case $\det(A), \det(B) \neq 0$, we show a non-existence result for piecewise regular solutions if A and B are non-orthogonal. For the degenerate and semi-degenerate cases, we give a characterisation for the rank-one convex hull of $\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$ and several existence results for Lipschitz and piecewise affine solutions. Finally, for each case, we construct several explicit non-trivial solutions for well-chosen boundary conditions u_0 .

Keywords : fixed point, partial differential equations, elliptic equations, Monge-Ampère equation, Hessian equations, wave equation, two well problem, rank-one convex hull.

Remerciements

Mes premiers remerciements sont évidemment destinés à mon directeur de thèse, le Professeur Bernard Dacorogna, pour m'avoir donné la chance de travailler dans son groupe ces cinq dernières années et de m'avoir fait découvrir le monde merveilleux de la recherche fondamentale en mathématiques. Je le remercie tout particulièrement pour son soutien moral et intellectuel lors des très fréquents moments difficiles que rencontre un chercheur dans son travail.

Je remercie les Professeurs Olivier Kneuss, Paolo Marcellini, Thomas Mountford et Marco Picasso pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse, et tout particulièrement mon senior Olivier pour sa relecture assidue de la thèse et ses remarques pertinentes.

Remerciements également à mes camarades mathématiciens avec qui j'ai pu avoir d'intéressantes discussions mathématiques et à mes collègues Gyula Csató, Laura Keller, Swarnendu Sil et David Strütt pour leur excellent travail lors de la période où j'ai été assistant principal du cours d'analyse III-IV. Un remerciement spécial à mon très cher camarade de bureau Swarnendu pour ses connaissances exceptionnelles en analyse et pour les nombreux cafés bus ensemble, et à qui je souhaite une brillante carrière académique.

Enfin, je tiens à remercier ma famille, mes amis et les membres de mon association Polyjapan pour leur soutien moral et émotionnel, qui m'a été indispensable durant ces quatre années de dur labeur à préparer ma thèse.

A tous merci infiniment !

TABLE DES MATIÈRES

1	Introduction	1
1.1	La méthode du point fixe et applications	1
1.1.1	Le résultat principal	1
1.1.2	Equations jacobienues	3
1.1.3	Equations elliptiques non-linéaires	4
1.1.4	Problèmes de transport	5
1.1.5	L'équation des ondes semi-linéaire	6
1.2	Le problème des deux puits	7
1.2.1	Le cas non-dégénéré	7
1.2.2	Le cas semi-dégénéré	8
1.2.3	Le cas dégénéré	10
I	La méthode du point fixe et applications	11
2	La méthode du point fixe	13
2.1	Le résultat principal	13
2.2	Autres résultats	17
3	Equations jacobienues	19
3.1	Le résultat principal	20
3.2	Un lemme technique	22
4	Equations elliptiques linéarisées	25
4.1	Le résultat principal	25
4.2	Un lemme technique	30
4.3	Cas particulier : le problème semi-linéaire	33
4.4	Exemple : l'équation des surfaces minimales	36

5	Equations elliptiques fortement non-linéaires : le problème de Dirichlet	39
5.1	Le résultat principal	39
5.2	Lemmes techniques	42
5.3	L'équation de Monge-Ampère	44
5.4	Equations hessiennes	48
6	Equations elliptiques fortement non-linéaires : le problème oblique	51
6.1	Le résultat principal	51
6.2	Lemmes techniques	55
7	Problèmes de transport	59
7.1	Lemmes techniques	60
7.2	Premier résultat	63
7.3	Second résultat	68
7.4	Annexe : Régularité, connexité et convexité	75
8	L'équation des ondes semi-linéaire	79
8.1	Le résultat principal	79
8.2	Un lemme technique	82
II	Le problème des deux puits	85
9	Le cas non-dégénéré $\det(A), \det(B) \neq 0$	87
9.1	Notations et résultats préliminaires	88
9.2	Non-existence de solutions affines par morceaux	93
9.3	Cas particuliers	104
9.3.1	Analyse dans un demi-plan	104
9.3.2	Analyse dans un angle de plan	110
9.3.3	Un domaine non-convexe	113
9.4	Le cas orthogonal	116
9.5	Solutions lipschitziennes	118
9.6	Annexe : connexions de rang-1 et enveloppe rang-1 convexe	120
9.7	Annexe : polygones	123
10	Le cas semi-dégénéré $\det(A) \neq 0, \det(B) = 0$	127
10.1	L'enveloppe rang-1 convexe	127
10.2	Théorèmes d'existence	138
10.3	Exemples de solutions affines par morceaux	143
10.3.1	Conditions nécessaires	143
10.3.2	Analyse dans un demi-plan	145
10.3.3	Analyse dans un angle de plan	153
10.4	Annexe : propriété de relaxation	155
11	Le cas dégénéré $\det(A) = \det(B) = 0$	159
11.1	L'enveloppe rang-1 convexe	159
11.2	Le problème de Dirichlet	163

III	Annexes	169
A	Espaces de Hölder	171
A.1	Définitions	171
A.2	Propriétés	173
B	Equations linéaires	177
B.1	L'équation de la divergence	177
B.2	Equations elliptiques du deuxième ordre	178
B.3	L'équation des ondes	185
B.4	Un problème sur le bord	186
	Bibliographie	187

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1 La méthode du point fixe et applications

La première partie de cette thèse traite d'un résultat basé sur le théorème du point fixe de Banach et de ses applications à diverses équations aux dérivées partielles (EDP). Plus précisément, nous considérons une équation abstraite de la forme

$$\mathcal{L}u + \mathcal{Q}(u) = f \tag{1.1}$$

où u est l'inconnue, \mathcal{L} est un opérateur linéaire inversible, \mathcal{Q} est un opérateur non-linéaire et f est une fonction donnée. Le résultat principal de cette première partie affirme qu'une équation de la forme (1.1) admet une solution, si la donnée f satisfait une certaine condition de petitesse.

De nombreuses classes d'EDP peuvent s'exprimer comme (1.1) et donc servir d'application pour le résultat principal; c'est ce que nous nommerons *la méthode du point fixe*. Les équations traitées dans cette thèse sont les équations jacobiennes (chapitre 3), les équations elliptiques non-linéaires (chapitres 4 à 6), des problèmes de transport (chapitre 7) et l'équation des ondes semi-linéaire (chapitre 8).

1.1.1 Le résultat principal

Voici le résultat sur lequel se base la première partie de la thèse (théorèmes 2.2 et 2.4).

Théorème 1.1.

(H_{XY}) Soient $X_1 \supset X_2$ des espaces de Banach et $Y_1 \supset Y_2$ des espaces normés, tels que toute suite $\{u_\nu\} \subset X_2$ satisfait la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu \xrightarrow{X_1} u \\ \|u_\nu\|_{X_2} \leq r \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in X_2 \\ \|u\|_{X_2} \leq r. \end{array} \right.$$

$(H_{\mathcal{L}})$ Soit une application linéaire $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ inversible à droite, c'est-à-dire qu'il existe $\mathcal{L}^{-1} : Y_2 \rightarrow X_2$ tel que $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \text{id}_{Y_2}$; soient également des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_{X_i} \leq k_i \|f\|_{Y_i}, \quad \forall f \in Y_2, i = 1, 2.$$

$(H_{\mathcal{Q}})$ Soient $\rho > 0$ et une application non-linéaire \mathcal{Q} tels que $\mathcal{Q}(0) = 0$,

$$\mathcal{Q} : B_\rho = \{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leq \rho\} \rightarrow Y_2$$

et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_{Y_1} \leq c_1(\|u\|_{X_1}, \|v\|_{X_1}) \|u - v\|_{X_1} \quad (1.2)$$

$$\|\mathcal{Q}(u)\|_{Y_2} \leq c_2(\|u\|_{X_1}) \|u\|_{X_2}, \quad (1.3)$$

où c_1, c_2 sont des fonctions séparément croissantes telles que

$$\begin{cases} c_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_1(0, 0) = 0, \\ c_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_2(0) = 0. \end{cases}$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $f \in Y_2$ satisfaisant l'inégalité

$$\|f\|_{Y_1} \leq \varepsilon, \quad (1.4)$$

le problème

$$\mathcal{L}u = \mathcal{Q}(u) + f$$

admet une unique solution $u \in B_\rho$ satisfaisant

$$\|u\|_{X_i} \leq 2k_i \|f\|_{Y_i}, \quad i = 1, 2.$$

Le théorème 1.1 a plusieurs avantages pratiques. D'abord, il ne requiert que des hypothèses naturelles sur les données, dû au fait qu'il suffit de savoir résoudre l'équation linéaire

$$\mathcal{L}u = f \quad \text{pour tout } f \in Y_2$$

et d'avoir de bonnes estimations sur la solution. De plus, la seule contrainte structurelle est la non-linéarité de l'opérateur \mathcal{Q} , donnée par les inégalités (1.2) et (1.3). En particulier, les opérateurs sur-linéaires de la forme $\mathcal{Q}(u) = u|u|^p$, avec $p > 0$ sont admissibles.

En contrepartie, l'existence de solutions n'est garantie que pour des données « petites » caractérisées par l'inégalité (1.4). Cette condition de petitesse est évidemment très restrictive. Toutefois, dans certains cas, nous verrons qu'elle permet d'affaiblir certaines autres conditions sur les données.

Le schéma d'application de la méthode du point fixe est essentiellement le même pour toutes les EDP qui seront traitées par la suite :

1. linéariser l'équation, de sorte à lui donner la forme

$$\mathcal{L}u = \mathcal{Q}(u) + f;$$

2. fixer le cadre fonctionnel abstrait et vérifier les hypothèses (H_{XY}) , $(H_{\mathcal{L}})$ et $(H_{\mathcal{Q}})$ du théorème 1.1. La plus délicate à vérifier est toujours $(H_{\mathcal{Q}})$;
3. appliquer le théorème 1.1 et revenir à l'équation de base.

1.1.2 Equations jacobiennes

La première application de la méthode du point fixe se fera sur les *équations jacobiennes*. Pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et avec $\lambda_i(M)$ ses n valeurs propres, nous définissons la k -trace de M (ou le k -ème polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de M) par

$$S_k : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$S_k(M) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1}(M) \dots \lambda_{i_k}(M), \quad 1 \leq k \leq n.$$

L'équation k -jacobienne (ou la k -ème équation jacobienne élémentaire) est l'équation différentielle

$$S_k(\nabla U) = f,$$

avec U l'inconnue et f une fonction donnée. En particulier,

$$S_1(\nabla U) = \text{tr}(\nabla U) = \text{div}(U) \quad \text{et} \quad S_n(\nabla U) = \det(\nabla U).$$

Notre premier résultat d'existence est le suivant (théorème 3.1).

Théorème 1.2. Soient $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe, borné et dont le bord est de classe $C^{r+2,\alpha}$. Soient un entier $2 \leq k \leq n$ et une fonction $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\int_{\Omega} [f - \binom{n}{k}] = 0, \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ tel que pour tout f satisfaisant l'inégalité

$$\|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon, \tag{1.5}$$

le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} S_k(\nabla U) = f & \text{dans } \Omega \\ U = \text{id} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution $U \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$.

De plus, il existe une constante $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ telle que

$$\|U - \text{id}\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq K \|f - \binom{n}{k}\|_{C^{r,\alpha}}.$$

Remarque 1.3.

- (i) Dans le cas $k = n$, l'hypothèse (1.5) n'est pas nécessaire (Dacorogna-Moser [23]).
- (ii) Les cas intermédiaires $2 \leq k \leq n-1$ ont été étudiés notamment par Gianetti-Pisante [33] dans le cadre d'opérateurs quasi-affines.
- (iii) L'hypothèse de petitesse des données

$$\|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

est intrinsèque à la méthode du point fixe et ne peut-être affaiblie. Elle a cependant l'avantage de ne porter que sur la norme « basse » $C^{0,\beta}$ plutôt que la norme $C^{r,\alpha}$.

1.1.3 Equations elliptiques non-linéaires

Notation 1.4. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $F = F(x, y, z, \xi)$. Alors pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, nous notons

$$F[u] = F[u](x) := F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De plus, si $F \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n})$ et si nous notons F_y , F_z et F_ξ les dérivées partielles de F par rapport à y , z et ξ respectivement, alors nous définissons de la même manière $F_y[u]$, $F_z[u]$ et $F_\xi[u]$.

Nous consacrerons plusieurs chapitres à l'application de la méthode du point fixe sur des EDP elliptiques ayant la forme générale

$$F[u] = 0, \quad \text{dans } \Omega,$$

avec une condition au bord de type Dirichlet (chapitres 4 et 5)

$$u = \varphi \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

ou, plus généralement, une condition de bord non-linéaire (chapitre 6)

$$G(x, u(x), \nabla u(x)) = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Ces équations ont été étudiées par énormément d'auteurs durant ces dernières décénies. Des références complètes seront mentionnées plus loin dans la thèse.

Dans un premier temps (chapitre 4), nous étudions un problème de Dirichlet elliptique linéarisé de la forme

$$\begin{cases} Lu + Q[u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

et montrons des conditions suffisantes sur le terme non-linéaire Q afin de pouvoir appliquer le théorème 1.1. Ceci nous permettra ensuite (chapitre 5) de travailler sur le problème général

$$\begin{cases} F[u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour lequel nous obtenons un résultat d'existence (théorème 5.3), essentiellement sous la condition d'ellipticité

$$\langle F_\xi[\varphi](x)p; p \rangle \geq \Lambda |p|^2, \quad \forall (x, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n,$$

avec $\Lambda > 0$, la condition d'unicité

$$F_y[\varphi](x) \leq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

et la condition de petitesse induite par la méthode du point fixe

$$\|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

Le problème modèle est l'équation de Monge-Ampère

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

qui est une des équations non-linéaires les plus étudiées, pour laquelle nous énonçons ici un résultat d'existence (théorème 5.11).

Théorème 1.5. Soient $r \in \mathbb{N}$, $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$. Soit $\lambda > 0$ une constante. Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$, $f > 0$ et $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uniformément convexe satisfaisant

$$\|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq \lambda,$$

le problème (1.6) admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uniformément convexe satisfaisant

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}}.$$

où $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$ est une constante.

Remarque 1.6. Il est intéressant de comparer ce théorème avec la littérature classique, notamment Caffarelli-Nirenberg-Spruck [5], Trudinger-Wang [60] et Wang [72]. Ces auteurs ont établi que le problème (1.6) est résoluble dans $C^{2,\alpha}$ sous les hypothèses optimales

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, uniformément convexe et de classe C^3 ,
- $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, avec $0 < \alpha < 1$, $f > 0$,
- $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$, fortement convexe.

Le théorème 1.5 apporte les améliorations suivantes :

- généralisation de la géométrie de Ω (non-nécessairement convexe),
- gain de régularité sur Ω et φ ($C^{2,\alpha}$ au lieu de C^3).

Par contre, on exige que les données f et φ soient « proches », plus précisément

$$\|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$, dont l'existence est donnée par le théorème 1.5, ne dépend pas de f .

Nous montrerons également un résultat d'existence pour un cas plus général de l'équation de Monge-Ampère (théorème 5.16)

$$\det(\nabla^2 u(x)) = f(x, u(x), \nabla u(x)) \quad \text{dans } \Omega,$$

et pour les équations hessiennes (théorème 5.20)

$$S_k(\nabla^2 u) = f \quad \text{dans } \Omega.$$

1.1.4 Problèmes de transport

Nous appliquerons ensuite (théorème 7.6) la méthode du point fixe à un problème de type Monge-Ampère issu de la théorie du transport optimal

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\Omega) = \Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

sous les conditions

$$f > 0, \quad \int_{\Omega} (f - 1) = 0. \quad (1.8)$$

Ce problème a également été intensément étudié durant ces dernières décénies (notamment par Caffarelli, Trudinger et Urbas).

Théorème 1.7. Soient $0 < \beta \leq \alpha < \gamma \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, de classe $C^{r+2,\gamma}$, connexe et dont le complémentaire est connexe. Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant (1.8) et

$$\|f - 1\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème (1.7) admet une solution strictement convexe $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}).$$

De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega) > 0$ telle que

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f - 1\|_{C^{r,\alpha}},$$

où $\varphi_0(x) := \frac{1}{2}|x|^2$.

Remarque 1.8. Comme pour les résultats obtenus précédemment par la méthode du point fixe, nous n'imposons aucune restriction sur la géométrie du domaine (voir, par exemple, Urbas [65] qui demande que Ω soit uniformément convexe). Le principal inconvénient de notre méthode est toujours la petitesse des données

$$\|f - 1\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon.$$

Suivant une démarche similaire (mais plus compliquée), nous montrerons également un résultat d'existence (théorème 7.10) pour le problème plus général

$$\begin{cases} g(\nabla u) \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\Omega) = \Omega^*, \end{cases}$$

avec $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ et

$$f, g > 0, \quad \int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} g$$

ainsi que des conditions de petitesse sur $\|f - g\|_{C^{0,\beta}}$ et $\text{dist}(\Omega, \Omega^*)$.

1.1.5 L'équation des ondes semi-linéaire

La dernière application de la méthode du point fixe se fera sur l'équation des ondes semi-linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + Q[u] = 0 & : \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & : x \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

où $Q[u] = Q[u](x, t) = Q(x, t, u(x, t))$, pour lequel nous montrons un résultat d'existence (théorème 8.4), pour $n = 1, 2, 3$, sous la condition de petitesse

$$\|Q[0]\|_{C^m(\mathbb{R}^n \times [0, T])} + \|g\|_{C^{m+1}(\mathbb{R}^n)} + \|h\|_{C^m(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon,$$

avec

$$Q[0] = Q[0](x, t) := Q(x, t, 0), \quad m := \left\lfloor \frac{n+2}{2} \right\rfloor$$

et des conditions structurelles minimales sur l'opérateur non-linéaire Q .

Exemple 1.9. Soient $n = 1, 2, 3$, $m := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ et $T > 0$. Soient $f \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Soit $p \geq m$ et le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u|u|^p = f & : \text{ dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & : x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1.9)$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(T, p) > 0$ tel que si f, g et h satisfont

$$\|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^{m+1}} + \|h\|_{C^m} \leq \varepsilon,$$

le problème (1.9) admet une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ telle que

$$\|u\|_{C^2} \leq K (\|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^{m+1}} + \|h\|_{C^m}),$$

où $K = K(T, p) > 0$ est une constante.

1.2 Le problème des deux puits

La seconde partie de cette thèse traite d'un problème d'inclusion différentielle appelé *le problème des deux puits*. Etant donnés deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné, et une application $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$, nous voulons trouver une application $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ satisfaisant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.10)$$

où, pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, on a noté

$$\mathbb{S}_M := SO(2)M = \left\{ R_\varphi M : R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\}.$$

Les « deux puits » en question sont les ensembles \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B . Nous allons traiter séparément les trois cas de ce problème, en fonction du déterminant de A et B .

1.2.1 Le cas non-dégénéré

Le premier cas qui sera traité est celui où les matrices A et B sont régulières, c'est-à-dire $\det(A), \det(B) \neq 0$. Dacorogna-Marcellini [12]-[14] et Müller-Sverak [49] ont montré indépendamment l'existence de solutions *lipschitziennes* pour (1.10) sous la condition

$$u_0 \in C^1_{\text{morc}}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2), \quad \nabla u_0 \in \text{int R co}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B) \quad \text{presque partout.}$$

Dans un premier temps (sections 9.1 et 9.2), nous allons montrer un résultat de non-existence de solutions *régulières par morceaux* non-triviales pour le cas où A, B sont *non-orthogonales* (théorème 9.13).

Théorème 1.10. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et dont le bord est de classe C^1_{morc} . Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ des matrices inversibles telles que

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}),$$

avec au moins une des inégalités stricte. Soit $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tel que $C \notin \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.11)$$

n'admet pas de solution $u \in C^1_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. Ω est borné ;
2. Ω est convexe et la normale extérieure au bord possède au moins trois valeurs distinctes.

Remarque 1.11.

- (i) Ce théorème est une extension d'un résultat de Dacorogna-Marcellini-Paolini ([21], théorème 28), qui ont établi la non-existence pour des domaines bornés dont le bord possède au plus sept morceaux C^1 .
- (ii) L'hypothèse des trois valeurs de la normale sur $\partial\Omega$ est nécessaire.

Dans un deuxième temps (section 9.3), nous allons analyser l'existence de solutions affines par morceaux au problème (1.11) pour des domaines n'entrant pas dans le cadre du théorème 1.10 : des demi-plans, des angles de plans, et des domaines non-convexes.

Nous faisons également le lien avec *l'enveloppe rang-un convexe* $\text{Rco}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B)$ des deux puits, qui joue un rôle central dans l'existence de solutions pour des inclusions différentielles ; en particulier, nous allons construire une condition de bord $C \in \text{int Rco}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B)$ pour laquelle (1.11) admet une solution affine sur un demi-plan.

1.2.2 Le cas semi-dégénéré

Le deuxième cas du problème des deux puits est celui où l'une des deux matrices est singulière, c'est-à-dire $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) = 0$. Ce cas est plus riche que le précédent, car le fait qu'une matrice soit singulière permet plus de connexions de rang un dans les deux puits, ce qui tend à favoriser l'existence de solutions affines par morceaux pour (1.11).

Nous commençons par montrer la caractérisation suivante de l'enveloppe rang-un convexe des deux puits (théorème 10.6).

Théorème 1.12. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que

$$\det(A) > 0, \quad \det(B) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2(BA^{-1}) \geq 1.$$

Posons $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors l'enveloppe rang-1 convexe de E est caractérisée par

$$\text{Rco}(E) = SO(2) \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{array}{l} \xi = sA + tR_\varphi B, \quad R_\varphi \in SO(2) \\ 0 \leq s \leq \frac{\det(\xi)}{\det(A)}, \quad 0 \leq t \leq 1 - \frac{\det(\xi)}{\det(A)} \end{array} \right\}. \quad (1.12)$$

Si, de plus, $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$, alors l'intérieur de $\text{Rco}(E)$ est non-vide et est donné par la même formule, mais avec des inégalités strictes partout.

Remarque 1.13. La formule (1.12) est exactement celle que Sverak [57] a établi pour le cas $\det(A) \geq \det(B) > 0$, mais avec ici $\det(B) = 0$.

Nous montrons ensuite deux résultats d'existence pour le cas semi-dégénéré : l'un pour des solutions lipschitziennes (théorème 10.10), l'autre pour des solutions affines par morceaux (théorème 10.11).

Théorème 1.14. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) > 0$, $\det(B) = 0$ et $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$. Soit $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Soit $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup \text{int R co}(E).$$

Alors il existe (un ensemble dense de solutions) $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Remarque 1.15. En travaillant sur chaque morceaux séparément, le résultat est encore vrai si u_0 est affine par morceaux.

Théorème 1.16. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ avec $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$ et $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$. Soient $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$ et le sous-ensemble $D \subset \partial \text{R co}(E)$ défini par

$$D := \left\{ \xi = sR_\varphi A + tR_\theta B : 0 < s = \frac{\det(\xi)}{\det(A)}, 0 < t < 1 - s, R_\varphi, R_\theta \in SO(2) \right\}.$$

Alors pour tout $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup D,$$

il existe une solution $u \in \text{loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.13)$$

Remarque 1.17.

- (i) Il est intéressant de comparer le théorème 1.16 avec le cas non-dégénéré, sur deux points.
 - Comme $D \subset \partial \text{R co}(E)$, il n'est plus nécessaire que $\nabla u_0 \in \text{int R co}(E)$ pour obtenir des solutions non-triviales. Cependant, la condition $\nabla u_0 \in E \cup D$ n'est pas nécessaire non-plus. Nous construirons notamment des solutions affines par morceaux admettant une donnée de bord satisfaisant $\nabla u_0 \in \text{int R co}(E)$ (exemples 10.19, 10.20 et 10.24).
 - Dans le cas non-dégénéré, des solutions localement affines par morceaux ne surviennent que dans le cas orthogonal ($A = I_2$, $B = I_2^-$), alors que dans le cas semi-dégénéré, aucune restriction supplémentaire sur les matrices n'est imposée.
- (ii) La preuve du théorème 1.14 est basé sur la méthode des catégories de Baire, employée par Dacorogna-Marcellini [15] pour le cas non-dégénéré.
- (iii) Le théorème 1.16 est obtenu via une réduction au cas scalaire et une construction « pyramidale » explicite de la solution u (voir Cellina [7] et Friesecke [31]).

Par la suite (section 10.3), nous construisons quelques exemples explicites de solutions affines par morceaux sur des demi-plans et des angles de plan.

1.2.3 Le cas dégénéré

Le dernier cas du problème des deux puits est celui où les deux matrices sont singulières, c'est-à-dire $\det(A) = \det(B) = 0$. Les matrices singulières ont la particularité de simplifier l'expression des deux puits. Plus précisément, il existe deux vecteurs $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B = SO(2)e_1 \otimes \{\alpha, \beta\}.$$

Cette caractérisation des deux puits permet d'obtenir une formule explicite pour leur enveloppe rang-un convexe (théorème 11.4).

Théorème 1.18. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(A) = \det(B) = 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B = SO(2)e_1 \otimes \{\alpha, \beta\} =: E.$$

Alors l'enveloppe rang-1 convexe de E est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Rco}(E) &= SO(2)e_1 \otimes \{s\alpha + t\beta : -1 \leq s, t, t + s \leq 1\}, \\ &= SO(2)e_1 \otimes \text{co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}). \end{aligned}$$

Si, de plus, $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, alors

$$\text{int Rco}(E) = SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}) \neq \emptyset.$$

Nous montrons ensuite que la condition

$$u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2), \quad \nabla u_0 \in E \cup \text{int Rco}(E)$$

est suffisante pour l'existence de solutions localement affines par morceaux (théorème 11.8) au problème de Dirichlet, cependant, nous ne sommes pas en mesure d'affirmer si cette condition est nécessaire ou pas.

Première partie

La méthode du point fixe et
applications

CHAPITRE 2

LA MÉTHODE DU POINT FIXE

Dans ce chapitre, nous montrons plusieurs résultats d'existence abstraits basés sur le théorème du point fixe de Banach. Ces résultats sont à la base de ce que nous nommerons la « méthode du point fixe » permettant de résoudre des équations différentielles.

2.1 Le résultat principal

Rappelons d'abord le théorème du point fixe de Banach.

Théorème 2.1. Soit un espace de Banach B et une application $T : B \rightarrow B$. Si T est une contraction, c'est-à-dire il existe une constante $0 < K < 1$ telle que

$$\|Tx - Ty\|_B \leq K \|x - y\|_B, \quad \forall x, y \in B$$

alors T admet un unique point fixe, c'est-à-dire il existe une unique solution à l'équation

$$Tx = x.$$

Démonstration. Ce résultat est classique. Voir par exemple Gilbarg-Trudinger [34], théorème 5.1. \square

Voici le résultat principal du chapitre.

Théorème 2.2.

(H_{XY}) Soient $X_1 \supset X_2$ des espaces de Banach et $Y_1 \supset Y_2$ des espaces normés, tels que toute suite $\{u_\nu\} \subset X_2$ satisfait la propriété

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\nu \xrightarrow{X_1} u \\ \|u_\nu\|_{X_2} \leq r \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} u \in X_2 \\ \|u\|_{X_2} \leq r. \end{array} \right.$$

($H_{\mathcal{L}}$) Soit une application linéaire $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ inversible à droite, c'est-à-dire il existe $\mathcal{L}^{-1} : Y_2 \rightarrow X_2$ tel que $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \text{id}_{Y_2}$; soient également des constantes $k_1, k_2 > 0$ telles que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_{X_i} \leq k_i \|f\|_{Y_i}, \quad \forall f \in Y_2, \quad i = 1, 2. \quad (2.1)$$

($H_{\mathcal{Q}}$) Soient $\rho > 0$ et une application non-linéaire \mathcal{Q} tels que $\mathcal{Q}(0) = 0$,

$$\mathcal{Q} : B_\rho = \{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leq \rho\} \rightarrow Y_2$$

et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_{Y_1} \leq c_1(\|u\|_{X_1}, \|v\|_{X_1}) \|u - v\|_{X_1} \quad (2.2)$$

$$\|\mathcal{Q}(u)\|_{Y_2} \leq c_2(\|u\|_{X_1}, \|u\|_{X_2}), \quad (2.3)$$

où $c_1, c_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont des fonctions séparément croissantes telles que

$$c_1(0, 0) = c_2(0, 0) = 0.$$

Alors pour tout $f \in Y_2$ satisfaisant les inégalités

$$2k_1 \|f\|_{Y_1} \leq \rho, \quad (2.4)$$

$$c_1(2k_1 \|f\|_{Y_1}, 2k_1 \|f\|_{Y_1}) \leq \frac{1}{2k_1}, \quad (2.5)$$

$$c_2(2k_1 \|f\|_{Y_1}, 2k_2 \|f\|_{Y_2}) \leq \|f\|_{Y_2}, \quad (2.6)$$

il existe un unique $u \in B_\rho$ telle que

$$\mathcal{L}u = \mathcal{Q}(u) + f \quad \text{et} \quad \|u\|_{X_i} \leq 2k_i \|f\|_{Y_i}, \quad i = 1, 2. \quad (2.7)$$

Remarque 2.3.

- (i) La preuve est reprise de Csato-Dacorogna-Kneuss [9] (théorème 18.1), qui l'ont utilisé dans le cadre de l'équation de rappel pour les formes différentielles. Une version simplifiée de ce résultat a été utilisée par Korn-Muntz pour l'équation des surfaces minimales (voir [11], théorème 5.30).
- (ii) L'hypothèse $c_i(0, 0) = 0$ n'est pas nécessaire à la preuve, mais elle « force » la non-linéarité de \mathcal{Q} .
- (iii) Les opérateurs sur-linéaires de la forme $\mathcal{Q}(u) = u|u|^p$, avec $p > 0$, satisfont les hypothèses (2.2) et (2.3).
- (iv) Si $\mathcal{Q} \equiv 0$, alors il n'y a rien à montrer, car, en choisissant $c_i \equiv 0$, nous constatons que la conclusion est contenue dans l'hypothèse ($H_{\mathcal{L}}$).

Démonstration. Fixons $f \in Y_2$ satisfaisant les inégalités (2.4)-(2.6). Pour tout $u \in X_2$, nous définissons l'application

$$N(u) := f + \mathcal{Q}(u)$$

et la boule

$$B := \{u \in X_2 : \|u\|_{X_i} \leq 2k_i \|f\|_{Y_i}\}.$$

L'hypothèse (H_{XY}) assure que le sous-espace $(B, \|\cdot\|_{X_1})$ est fermé. De plus, l'inégalité (2.4) assure que les inégalités (2.2) et (2.3) sont valables pour tout $u, v \in B \subset B_\rho$.

Nous allons résoudre le problème

$$\mathcal{L}^{-1}N(u) = u$$

dans B . Ceci nous donnera une solution à (2.7), par l'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$. Pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{L}^{-1}N : B \rightarrow B$ est une contraction et appliquer le théorème 2.1. Nous procédons en deux étapes.

Etape 1. Montrons que $\mathcal{L}^{-1}N : B \rightarrow B$ est une contraction. Soient $u, v \in B$. Alors en utilisant successivement les inégalités (2.1), (2.2) et (2.5) et le fait que c_1 est séparément croissante,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}N(u) - \mathcal{L}^{-1}N(v)\|_{X_1} &\leq k_1 \|N(u) - N(v)\|_{Y_1} \\ &\leq k_1 \|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_{Y_1} \\ &\leq k_1 c_1(\|u\|_{X_1}, \|v\|_{X_1}) \|u - v\|_{X_1} \\ &\leq k_1 c_1(2k_1 \|f\|_{Y_1}, 2k_1 \|f\|_{Y_1}) \|u - v\|_{X_1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{X_1}. \end{aligned}$$

Etape 2. Montrons que $\mathcal{L}^{-1}N : B \rightarrow B$ est bien définie. Soit $u \in B$. D'une part, l'inégalité (2.1) nous donne

$$\|\mathcal{L}^{-1}N(0)\|_{X_1} \leq k_1 \|N(0)\|_{Y_1} \leq k_1 \|f\|_{Y_1},$$

d'où, par l'étape 1,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}N(u)\|_{X_1} &\leq \|\mathcal{L}^{-1}N(u) - \mathcal{L}^{-1}N(0)\|_{X_1} + \|\mathcal{L}^{-1}N(0)\|_{X_1} \\ &\leq \frac{1}{2} \|u\|_{X_1} + k_1 \|f\|_{Y_1} \leq 2k_1 \|f\|_{Y_1}. \end{aligned}$$

D'autre part, en utilisant successivement les inégalités (2.1), (2.3) et (2.6) et le fait que c_2 est séparément croissante,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{L}^{-1}N(u)\|_{X_2} &\leq k_2 \|N(u)\|_{Y_2} \\ &\leq k_2 \|\mathcal{Q}(u)\|_{Y_2} + k_2 \|f\|_{Y_2} \\ &\leq k_2 c_2(\|v\|_{X_1}, \|v\|_{X_2}) + k_2 \|f\|_{Y_2} \\ &\leq k_2 c_2(2k_1 \|f\|_{Y_1}, 2k_2 \|f\|_{Y_2}) + k_2 \|f\|_{Y_2} \\ &\leq k_2 (1 + 1) \|f\|_{Y_2} \\ &= 2k_2 \|f\|_{Y_2}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien $\mathcal{L}^{-1}N(u) \in B$, pour tout $u \in B$, ce qui achève la preuve. \square

Le résultat suivant consiste en un léger renforcement de l'hypothèse $(H_{\mathcal{Q}})$, permettant de simplifier les conditions (2.4)-(2.6), ce qui le rend plus propice aux applications.

Théorème 2.4. Sous les hypothèses du théorème 2.2, avec (H_Q) remplacée par (H'_Q) Soient $\rho > 0$ et une application non-linéaire Q tels que $Q(0) = 0$,

$$Q : B_\rho = \{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leq \rho\} \rightarrow Y_2$$

et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\|Q(u) - Q(v)\|_{Y_1} \leq c_1(\|u\|_{X_1}, \|v\|_{X_1}) \|u - v\|_{X_1} \quad (2.8)$$

$$\|Q(u)\|_{Y_2} \leq c_2(\|u\|_{X_1}) \|u\|_{X_2}, \quad (2.9)$$

où c_1, c_2 sont des fonctions séparément croissantes telles que

$$\begin{cases} c_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_1(0, 0) = 0, \\ c_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_2(0) = 0. \end{cases}$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $f \in Y_2$ satisfaisant l'inégalité

$$\|f\|_{Y_1} \leq \varepsilon, \quad (2.10)$$

le problème

$$\mathcal{L}u = Q(u) + f$$

admet une unique solution $u \in B_\rho$ telle que

$$\|u\|_{X_i} \leq 2k_i \|f\|_{Y_i}, \quad i = 1, 2.$$

Remarque 2.5.

(i) Le rajout de l'hypothèse de continuité des fonctions c_1, c_2 est naturelle, au vu des équations différentielles qui seront traitées dans les chapitres suivants. Ceci simplifie énormément les conditions suffisantes sur la donnée f , ici réduite à se situer suffisamment proche de 0 (inégalité (2.10)).

(ii) Il est possible de généraliser le théorème si l'inégalité (2.9) est remplacée par

$$\|Q(u)\|_{Y_2} \leq c_2(\|u\|_{X_1}) \|u\|_{X_2}^\gamma, \quad \text{avec } 0 < \gamma < 1,$$

cependant, ceci nécessite la contrainte supplémentaire

$$\|f\|_{Y_2} \geq \frac{1}{2k_2}$$

qui n'est pas naturelle, car elle exclut la possibilité que $f \equiv 0$. Ce cas inclut, notamment, les applications Q dont la non-linéarité est sous-quadratique.

Démonstration. Par continuité des fonctions c_1, c_2 en 0, et par le fait qu'elles ne soient pas identiquement nulles, il existe $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que

$$0 \leq a \leq \delta_1 \quad \Rightarrow \quad c_1(a, a) \leq \frac{1}{2k_1},$$

$$0 \leq a \leq \delta_2 \quad \Rightarrow \quad c_2(a) \leq \frac{1}{2k_2}.$$

En posant,

$$\varepsilon := \frac{\min\{\rho, \delta_1, \delta_2\}}{2k_1} > 0,$$

les inégalités (2.4)-(2.6) du théorème 2.2 découlent directement des hypothèses. \square

2.2 Autres résultats

Le résultat suivant est une généralisation des théorèmes 2.2 et 2.4 qui permet de résoudre des problèmes ayant une composante linéaire pouvant être rendue « petite ».

Théorème 2.6. Sous les hypothèses du théorème 2.2, avec (H_Q) remplacée par $(H_{\mathcal{M}Q})$ Soient $\rho > 0$, une application linéaire \mathcal{M} et une non-linéaire Q tels que

$$\mathcal{M}, Q, \mathcal{M} + Q : B_\rho = \{u \in X_2 : \|u\|_{X_1} \leq \rho\} \rightarrow Y_2,$$

$Q(0) = 0$ et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{M}u\|_{Y_i} &\leq \frac{1}{4k_i} \|u\|_{X_i}, \quad i = 1, 2 \\ \|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_{Y_1} &\leq c_1(\|u\|_{X_1}, \|v\|_{X_1}) \|u - v\|_{X_1}, \\ \|\mathcal{Q}(u)\|_{Y_2} &\leq c_2(\|u\|_{X_1}) \|u\|_{X_2}. \end{aligned}$$

où c_1, c_2 sont des fonctions séparément croissantes telles que

$$\begin{cases} c_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_1(0, 0) = 0, \\ c_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+), & c_2(0) = 0. \end{cases}$$

Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $f \in Y_2$ satisfaisant

$$\|f\|_{Y_1} \leq \varepsilon,$$

le problème

$$\mathcal{L}u = \mathcal{M}u + \mathcal{Q}(u) + f$$

admet une unique solution $u \in B_\rho$ telle que

$$\|u\|_{X_i} \leq 2k_i \|f\|_{Y_i}, \quad i = 1, 2.$$

Démonstration. La preuve est identique à celle des théorèmes 2.2 et 2.4. \square

Voici un cas particulier du théorème précédent, qui ne fait intervenir qu'une paire d'espaces.

Corollaire 2.7.

(h_{XY}) Soient X un espace de Banach et Y un espace normé.

$(h_{\mathcal{L}})$ Soit une application linéaire $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ inversible à droite, c'est-à-dire il existe $\mathcal{L}^{-1} : Y \rightarrow X$ tel que $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \text{id}_Y$; soit également une constante $k > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_X \leq k \|f\|_Y, \quad \forall f \in Y.$$

$(h_{\mathcal{M}Q})$ Soient $\rho > 0$, une application linéaire \mathcal{M} et une non-linéaire Q tels que

$$\mathcal{M}, Q, \mathcal{M} + Q : B_\rho = \{u \in X : \|u\|_X \leq \rho\} \rightarrow Y,$$

$Q(0) = 0$ et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\|\mathcal{M}u\|_Y \leq \frac{1}{4k} \|u\|_X,$$

$$\|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_Y \leq c(\|u\|_X, \|v\|_X) \|u - v\|_X,$$

où $c \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ est séparément croissantes et $c(0, 0) = 0$.

Alors pour tout $f \in Y$ et $m > 0$ satisfaisant les inégalités

$$\|f\|_Y \leq \frac{\rho}{2k},$$

$$c(2k\|f\|_Y, 2k\|f\|_Y) \leq \frac{1}{4k},$$

il existe une unique fonction $u \in B_\rho$ telle que

$$\mathcal{L}u = \mathcal{Q}(u) + f \quad \text{et} \quad \|u\|_X \leq 2k\|f\|_Y.$$

Démonstration. Les hypothèses du théorème 2.6 sont immédiates avec

$$X_1 = X_2 := X, \quad Y_1 = Y_2 := Y,$$

$$c_1 \equiv c, \quad c_2(a, b) := c(a, 0)b, \quad \forall a, b \geq 0.$$

□

Le dernier résultat est très similaire au précédent, à la différence qu'il ne demande l'inversibilité de l'opérateur linéaire \mathcal{L} que dans un sous-espace de l'ensemble d'arrivée.

Théorème 2.8. (h_{XY}) Soient X un espace de Banach et deux espaces normés Y, Z tels que $Y \subset Z$.

($h_{\mathcal{L}}$) Soit une application linéaire $\mathcal{L} : X \rightarrow Z$ inversible à droite sur Y , c'est-à-dire il existe $\mathcal{L}^{-1} : Y \rightarrow X$ tel que $\mathcal{L}\mathcal{L}^{-1} = \text{id}_Y$; soit également une constante $k > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_X \leq k\|f\|_Y, \quad \forall f \in Y. \quad (2.11)$$

($h_{\mathcal{Q}}$) Soient $\rho > 0$ et une application non-linéaire \mathcal{Q} tels que

$$\mathcal{Q} : B_\rho = \{u \in X : \|u\|_X \leq \rho\} \rightarrow Y,$$

$\mathcal{Q}(0) = 0$ et, pour tout $u, v \in B_\rho$,

$$\|\mathcal{Q}(u) - \mathcal{Q}(v)\|_Y \leq c(\|u\|_X, \|v\|_X) \|u - v\|_X, \quad (2.12)$$

où $c \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ est séparément croissantes et $c(0, 0) = 0$.

Alors pour tout $f \in Y$ satisfaisant les inégalités

$$\|f\|_Y \leq \frac{\rho}{2k}, \quad (2.13)$$

$$c(2k\|f\|_Y, 2k\|f\|_Y) \leq \frac{1}{4k}, \quad (2.14)$$

il existe une unique fonction $u \in B_\rho$ telle que

$$\mathcal{L}u = \mathcal{Q}(u) + f \quad \text{et} \quad \|u\|_X \leq 2k\|f\|_Y. \quad (2.15)$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 2.2.

□

CHAPITRE 3

EQUATIONS JACOBIENNES

Les *équations jacobienues* sont des équations différentielles faisant intervenir les valeurs propres de la matrice jacobienne $\nabla U = \left(\frac{\partial U^i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$ d'une application $U \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$. Pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$, nous notons $\{\lambda_i(M)\}_{i=1}^n$ les n valeurs propres de M , et définissons, pour tout $1 \leq k \leq n$, la *k-trace* de M (ou le *k-ème polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de M*)

$$S_k : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$S_k(M) := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1}(M) \dots \lambda_{i_k}(M) = \text{tr}(\text{adj}_k(M)),$$

où $\text{adj}_k(M)$ est la matrice des mineurs d'ordre k de M . Pour tout $1 \leq k \leq n$, l'équation *k-jacobienne* (ou la *k-ème équation jacobienne élémentaire*) est l'équation différentielle

$$S_k(\nabla U) = f,$$

avec f une fonction donnée. En particulier, les deux cas

$$S_1(\nabla U) = \text{tr}(\nabla U) = \text{div}(U) \quad \text{et} \quad S_n(\nabla U) = \det(\nabla U).$$

ont été intensément étudiés (voir [9] pour un historique détaillé). Les cas intermédiaires $2 \leq k \leq n-1$ ont été étudiés notamment par Gianetti-Pisante [33] dans le cadre d'opérateurs quasi-affines.

Dans ce chapitre, nous allons démontrer un résultat d'existence pour un problème de Dirichlet associé à l'équation *k-jacobienne* en utilisant la méthode du point fixe développée dans le chapitre 2. Plus précisément, nous allons montrer que le problème

$$\begin{cases} S_k(\nabla U) = f & \text{dans } \Omega \\ U = \text{id} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution $U \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ sous certaines conditions de petitesse sur f .

3.1 Le résultat principal

Voici le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 3.1. Soient

- $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe, borné et dont le bord est de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- un entier $2 \leq k \leq n$ et une fonction $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\int_{\Omega} [f - \binom{n}{k}] = 0, \quad \text{avec} \quad \binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}. \quad (3.1)$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ tel que pour tout f satisfaisant l'inégalité

$$\|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon, \quad (3.2)$$

le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} S_k(\nabla U) = f & \text{dans } \Omega \\ U = \text{id} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

admet une solution $U \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$.

De plus, il existe une constante $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ telle que

$$\|U - \text{id}\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq K \|f - \binom{n}{k}\|_{C^{r,\alpha}}, \quad (3.4)$$

$$\|U - \text{id}\|_{C^{1,\beta}} \leq K \|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}}, \quad (3.5)$$

où id est la fonction identité sur $\overline{\Omega}$.

Remarque 3.2.

- (i) Dans le cas $k = n$, l'hypothèse (3.2) n'est pas nécessaire ; il s'agit du théorème de Dacorogna-Moser (voir [9] et [23]).
- (ii) L'hypothèse de petitesse des données

$$\|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

est intrinsèque à la méthode du point fixe et ne peut-être affaiblie. Elle a cependant l'avantage de ne porter que sur la norme « basse » $C^{0,\beta}$ plutôt que la norme $C^{r,\alpha}$.

Démonstration. La démonstration se déroule en trois étapes : nous allons d'abord linéariser le problème (3.3) pour en extraire une composante linéaire, puis appliquer le théorème 2.4 et enfin conclure.

Etape 1 : linéarisation. Soit U une solution de (3.3) et posons

$$V := U - \text{id}, \quad \nabla V = \nabla U - I_n,$$

avec $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ la matrice identité. Alors la première équation de (3.3) devient

$$\begin{aligned} f &= S_k(\nabla V + I_n) = S_k(I_n) + \langle \nabla S_k(I_n); \nabla V \rangle + Q(V) \\ &= \binom{n}{k} + \binom{n-1}{k-1} \text{div}(V) + Q(V), \end{aligned}$$

où

$$\mathcal{Q}(V) = \mathcal{Q}(V)(x) := S_k(\nabla V(x) + I_n) - S_k(I_n) - \langle \nabla S_k(I_n); \nabla V(x) \rangle. \quad (3.6)$$

Le problème (3.3) alors équivaut au problème linéarisé

$$\begin{cases} \binom{n-1}{k-1} \operatorname{div}(V) = f - \binom{n}{k} - \mathcal{Q}(V) & \text{dans } \Omega \\ V = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.7)$$

Etape 2 : point fixe. Nous reformulons le problème (3.7) en termes d'opérateurs afin de pouvoir lui appliquer le théorème 2.4. Soient les espaces de fonctions

$$X_1 := \{V \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) : V|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad X_2 := \{V \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) : V|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$Y_1 := \left\{g \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} g = 0\right\}, \quad Y_2 := \left\{g \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} g = 0\right\}.$$

Soient l'opérateur linéaire $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ défini par

$$\mathcal{L}V := \binom{n-1}{k-1} \operatorname{div}(V), \quad \forall V \in X_2$$

et l'opérateur $\mathcal{Q} : X_2 \rightarrow Y_2$ donné par (3.6). Vérifions les hypothèses du théorème 2.4.

1. L'hypothèse (H_{XY}) est satisfaite grâce à la proposition A.5.
2. L'hypothèse (3.1) nous permet d'invoquer le théorème B.1 et la remarque B.2 : \mathcal{L} est inversible à droite et il existe une constante $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}g\|_{X_i} \leq K \|g\|_{Y_i}, \quad \forall g \in Y_2, \quad i = 1, 2.$$

Par conséquent, l'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$ est vérifiée.

3. Enfin, par les lemmes 3.4 et 3.3, $\mathcal{Q}(V) \in Y_2$ pour tout $V \in X_2$ et il existe une constante $c = c(\alpha, \beta, r, \Omega, k) > 0$ telle que pour tout $V, W \in X_2$ satisfaisant $\|V\|_{X_1}, \|W\|_{X_1} \leq 1$,

$$\|\mathcal{Q}(V) - \mathcal{Q}(W)\|_{Y_1} \leq c(\|V\|_{X_1} + \|W\|_{X_1}) \|V - W\|_{X_1}, \quad (3.8)$$

$$\|\mathcal{Q}(V)\|_{Y_2} \leq c \|V\|_{X_1} \|V\|_{X_2}, \quad (3.9)$$

ce qui correspond exactement à l'hypothèse $(H'_{\mathcal{Q}})$.

Toutes les hypothèses du théorème 2.4 ont été vérifiées. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $g \in Y_2$ satisfaisant

$$\|g\|_{Y_1} \leq \varepsilon,$$

il existe une solution $V \in X_2$ au problème

$$\mathcal{L}V = g + \mathcal{Q}(V), \quad (3.10)$$

et

$$\|V\|_{X_i} \leq 2K \|g\|_{Y_i}.$$

Etape 3 : conclusion. Par construction, le problème (3.10) est équivalent à (3.7). Donc, par ce qui précède, (3.7) admet une solution $V \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ si

$$\|f - \binom{n}{k}\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon.$$

En posant $U := V + \text{id}$, nous avons ainsi obtenu une solution pour le problème initial (3.3), qui satisfait de plus les inégalités (3.4) et (3.5). \square

3.2 Un lemme technique

Dans cette section, nous allons démontrer en détail un résultat (utilisé dans la preuve du théorème 3.1) donnant une estimation en norme hölderienne du reste du développement d'ordre 1 de S_k .

Lemme 3.3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$, $2 \leq k \leq n$, $\Lambda > 0$ et $\Phi \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\|\Phi\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq \Lambda. \quad (3.11)$$

Pour toute fonction $U \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, posons

$$Q(U) := S_k(\nabla U + \nabla \Phi) - S_k(\nabla \Phi) - \langle \nabla S_k(\Phi); \nabla U \rangle.$$

Alors il existe une constante $c = c(\alpha, \beta, r, \Omega, k, \Lambda) > 0$ telle que pour tout $U, V \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\|U\|_{C^{1,\beta}}, \|V\|_{C^{1,\beta}} \leq 1, \quad (3.12)$$

nous avons les inégalités

$$\|Q(U)\|_{C^{r,\alpha}} \leq c \|U\|_{C^{1,\beta}} \|U\|_{C^{r+1,\alpha}}, \quad (3.13)$$

$$\|Q(U) - Q(V)\|_{C^{0,\beta}} \leq c(\|U\|_{C^{1,\beta}} + \|V\|_{C^{1,\beta}}) \|U - V\|_{C^{1,\beta}}. \quad (3.14)$$

Démonstration. Soient $U, V \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant (3.12) et notons les dérivées partielles $U_i^j := \frac{\partial U^j}{\partial x_i}$. Par la suite, nous noterons $\gamma_i > 0$ des constantes indépendantes de U, V . La preuve se déroule en deux étapes.

Etape 1. L'expression $Q(U)$ est une somme de monômes de la forme, au signe près

$$U_{i_{\varphi(1)}}^{j_{\varphi(1)}} \dots U_{i_{\varphi(t)}}^{j_{\varphi(t)}} \Phi_{i_{\varphi(t+1)}}^{j_{\varphi(t+1)}} \dots \Phi_{i_{\varphi(k)}}^{j_{\varphi(k)}},$$

où $2 \leq t \leq k$ et $\varphi : \{1, \dots, k\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ est une fonction injective. Fixons un entier $2 \leq t \leq k$. Par inégalité triangulaire, il est suffisant de montrer les estimations (3.13) et (3.14) pour un seul de ces termes, disons

$$Q_t(U) := U_1^1 \dots U_t^t \Phi_{t+1}^{t+1} \dots \Phi_k^k.$$

Par les propriétés de la norme hölderienne d'un produit (théorème A.7) et (3.11), nous avons

$$\begin{aligned} \|Q_t(U)\|_{C^{r,\alpha}} &\leq \gamma_1 \|U_1^1 \dots U_t^t\|_{C^{r,\alpha}} \|\Phi_{t+1}^{t+1} \dots \Phi_k^k\|_{C^{r,\alpha}} \\ &\leq \gamma_2 \|U_1^1 \dots U_t^t\|_{C^{r,\alpha}} \|\Phi\|_{C^{r+1,\alpha}}^{k-t} \\ &\leq \gamma_3 \|U_1^1 \dots U_t^t\|_{C^{r,\alpha}}. \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve

$$\|Q_t(U) - Q_t(V)\|_{C^{0,\beta}} \leq \gamma_4 \|U_1^1 \dots U_t^t - V_1^1 \dots V_t^t\|_{C^{0,\beta}}.$$

Il est donc suffisant de montrer les estimations (3.13) et (3.14) pour le monôme $U_1^1 \dots U_t^t$.

Etape 2. Nous renommons

$$Q_t(U) := U_1^1 \dots U_t^t,$$

et montrons par récurrence sur t les estimations (3.13) et (3.14).

Le cas $t = 2$. Nous voulons d'abord estimer

$$Q_2(U) = U_1^1 U_2^2.$$

Le théorème A.7 nous donne directement

$$\begin{aligned} \|Q_2(U)\|_{C^{r,\alpha}} &\leq \gamma_1 (\|U_1^1\|_{C^0} \|U_2^2\|_{C^{r,\alpha}} + \|U_1^1\|_{C^{r,\alpha}} \|U_2^2\|_{C^0}) \\ &\leq 2\gamma_1 \|U\|_{C^{1,\beta}} \|U\|_{C^{r+1,\alpha}}. \end{aligned}$$

Ensuite, nous pouvons écrire

$$Q_2(U) - Q_2(V) = U_1^1 U_2^2 - V_1^1 V_2^2 = U_1^1 (U_2^2 - V_2^2) + (U_1^1 - V_1^1) V_2^2,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|Q_2(U) - Q_2(V)\|_{C^{0,\beta}} &\leq \|U_1^1 (U_2^2 - V_2^2)\|_{C^{0,\beta}} + \|(U_1^1 - V_1^1) V_2^2\|_{C^{0,\beta}} \\ &\leq \gamma_2 (\|U_1^1\|_{C^{0,\beta}} \|U_2^2 - V_2^2\|_{C^{0,\beta}} + \|U_1^1 - V_1^1\|_{C^{0,\beta}} \|V_2^2\|_{C^{0,\beta}}) \\ &\leq \gamma_2 (\|U\|_{C^{1,\beta}} + \|V\|_{C^{1,\beta}}) \|U - V\|_{C^{1,\beta}}. \end{aligned}$$

Nous avons ainsi obtenu les estimations (3.13) et (3.14) pour Q_2 .

Le cas $t \geq 2$. Supposons que les estimations (3.13) et (3.14) soient vraies pour Q_t , et montrons-les pour Q_{t+1} . Puisque

$$Q_{t+1}(U) = Q_t(U) U_{t+1}^{t+1},$$

nous avons d'une part

$$\begin{aligned} \|Q_{t+1}(U)\|_{C^{r,\alpha}} &= \|Q_t(U) U_{t+1}^{t+1}\|_{C^{r,\alpha}} \\ &\leq \gamma_3 (\|Q_t(U)\|_{C^0} \|U_{t+1}^{t+1}\|_{C^{r,\alpha}} + \|Q_t(U)\|_{C^{r,\alpha}} \|U_{t+1}^{t+1}\|_{C^0}) \\ (\text{par récurrence}) &\leq \gamma_4 (\|U\|_{C^1}^t \|U\|_{C^{r+1,\alpha}} + \|U\|_{C^{1,\beta}} \|U\|_{C^{r+1,\alpha}} \|U\|_{C^1}) \\ (\text{par (3.12)}) &\leq c \|U\|_{C^{1,\beta}} \|U\|_{C^{r+1,\alpha}}, \end{aligned}$$

ce qui montre (3.13). D'autre part,

$$\begin{aligned} \|Q_{t+1}(U) - Q_{t+1}(V)\|_{C^{0,\beta}} &\leq \|Q_t(U) (U_{t+1}^{t+1} - V_{t+1}^{t+1})\|_{C^{0,\beta}} \\ &\quad + \|(Q_t(U) - Q_t(V)) V_{t+1}^{t+1}\|_{C^{0,\beta}} \\ (\text{théorème A.7}) &\leq \gamma_5 \|Q_t(U)\|_{C^{0,\beta}} \|U - V\|_{C^{1,\beta}} \\ &\quad + K_4 \|Q_t(U) - Q_t(V)\|_{C^{0,\beta}} \|V\|_{C^{1,\beta}} \\ (\text{par récurrence}) &\leq \gamma_6 \|U\|_{C^{1,\beta}}^t \|U - V\|_{C^{1,\beta}} \\ &\quad + K_5 (\|U\|_{C^{1,\beta}} + \|V\|_{C^{1,\beta}}) \|V\|_{C^{1,\beta}} \|U - V\|_{C^{1,\beta}} \\ (\text{par (3.12)}) &\leq c (\|U\|_{C^{1,\beta}} + \|V\|_{C^{1,\beta}}) \|U - V\|_{C^{1,\beta}}, \end{aligned}$$

ce qui montre (3.14) et termine la preuve. \square

Lemme 3.4. Sous les mêmes notations que précédemment, supposons que

$$U \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n), \quad U|_{\partial\Omega} \equiv 0.$$

Alors

$$\int_{\Omega} Q(U(x)) \, dx = 0.$$

Démonstration. Voir la preuve du théorème 8.35 dans Dacorogna [10]. \square

CHAPITRE 4

EQUATIONS ELLIPTIQUES LINÉARISÉES

Ce premier chapitre consacré aux équations elliptiques non-linéaires traite le cas d'une équation ayant une structure linéarisée. Plus précisément, nous allons traiter un problème de la forme

$$\begin{cases} Lu(x) + Q(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

où L est un opérateur linéaire du deuxième ordre inversible et Q est une composante sur-linéaire. Les résultats obtenus ici serviront à résoudre des problèmes plus généraux dans le chapitre suivant.

4.1 Le résultat principal

Nous commençons par un résultat d'existence pour le problème (4.1) en utilisant la méthode du point fixe. Les lemmes techniques employés dans la preuve seront montrés plus loin.

Hypothèse 4.1. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- un opérateur

$$Lu = Lu(x) := \langle A(x); \nabla^2 u(x) \rangle + \langle b(x); \nabla u(x) \rangle + c(x)u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

tel que $A \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n \times n})$ et est définie strictement positive sur $\overline{\Omega}$, $b \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $c \leq 0$;

– un scalaire $M > 0$, le sous-ensemble P_M défini par

$$P_M := \{(y, z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} : |y|, |z|, |\xi| \leq M\};$$

– une application $Q = Q(x, y, z, \xi) \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega} \times P_M)$ telle que

$$(y, z, \xi) \mapsto Q(x, y, z, \xi) \in C^1(P_M), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \text{si } r = 0, \quad (4.2)$$

$$Q_y := \frac{\partial Q}{\partial y} \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M),$$

$$Q_z := \left(\frac{\partial Q}{\partial z_i} \right)_{i=1}^n \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n),$$

$$Q_\xi := \left(\frac{\partial Q}{\partial \xi_{ij}} \right)_{i, j=1}^n \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}),$$

pour un certain $p \in]\alpha, 1]$ et, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $(y_i, z_i, \xi_i) \in P_M$ ($i = 1, 2$), nous avons l'inégalité

$$|Q(x, y_1, z_1, \xi_1) - Q(x, y_2, z_2, \xi_2)| \leq C_0(|y_i|, |z_i|, |\xi_i|)(|y_1 - y_2|, |z_1 - z_2|, |\xi_1 - \xi_2|), \quad (4.3)$$

où $C_0 \in C(\mathbb{R}_+^6; \mathbb{R}_+)$ est une fonction séparément croissante et $C_0(0) = 0$;

– une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|Q_y\|_{C^{r, p}}, \|Q_z\|_{C^{r, p}}, \|Q_\xi\|_{C^{r, p}} \leq \lambda$$

ou, si $r = 0$,

$$\|Q_y\|_{C^{0, 1}}, \|Q_z\|_{C^{0, 1}}, \|Q_\xi\|_{C^{0, 1}} \leq \lambda.$$

Pour alléger l'écriture, nous écrirons parfois

$$C_0(|y|, |z|, |\xi|) \quad \text{au lieu de} \quad C_0(|y|, |y|, |z|, |z|, |\xi|, |\xi|)$$

et

$$C_0(|y|) \quad \text{au lieu de} \quad C_0(|y|, |y|, |y|, |y|, |y|, |y|).$$

Nous noterons également, pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$

$$Q[u] = Q[u](x) := Q(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)),$$

en particulier,

$$Q[0] = Q(x, 0, 0, 0).$$

Remarque 4.2.

- (i) Les hypothèses de régularité sur Q ne peuvent *a priori* pas être simplifiées, à cause de la nature très générale du terme non-linéaire. Cependant, ces hypothèses ne sont pas nécessaires et il est possible de les réduire si l'on impose des conditions structurelles supplémentaires sur Q . Par exemple, si les dérivées de Q ne dépendent pas de ξ , alors, dans le cas $r = 0$, il suffit qu'elles soient de classe $C^{0, p}$. Ce cas particulier sera traité dans la section 4.3. Voir également l'exemple 4.7.

- (ii) Le cas linéaire $Q(x, y, z, \xi) = y + z + \xi$ est exclu, car il demande que $C_0 \equiv 1$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse $C_0(0) = 0$.
- (iii) Les cas où les variables (y, z, ξ) de Q sont séparément sous-linéaires sont exclus, car il n'admettent pas de fonction C_0 continue satisfaisant (4.3). Par exemple, pour $Q(y) := |y|^p$, $0 < p < 1$, l'application

$$C_0(y_1, y_2) := \frac{||y_1|^p - |y_2|^p|}{|y_1 - y_2|}$$

n'est pas continuellement prolongeable en $(0, 0)$.

Théorème 4.3. Sous les hypothèses 4.1, il existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0,$$

tel que pour tout $\varphi \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant l'inégalité

$$\|Q[0]\|_{C^{0, \beta}} + \|\varphi\|_{C^{2, \beta}} \leq \varepsilon, \quad (4.4)$$

le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu(x) + Q(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

admet une unique solution $u \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$. De plus, il existe une constante

$$K = K(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M) > 0$$

telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2, \beta}} &\leq K (\|Q[0]\|_{C^{0, \beta}} + \|\varphi\|_{C^{2, \beta}}), \\ \|u\|_{C^{r+2, \alpha}} &\leq K (\|Q[0]\|_{C^{r, \alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+2, \alpha}}), \end{aligned}$$

Remarque 4.4.

- (i) Il faut faire attention au fait que dans l'inégalité (4.4), il y a une dépendance en Q des deux côtés de l'inégalité (ε dépend de bornes supérieures pour les dérivées de Q). Ceci est le cas pour des problèmes de la forme $Q(x, y, z, \xi) = f(x)q(y, z, \xi)$. Par contre, si la variable x est séparée des autres par une somme, c'est-à-dire si $Q(x, y, z, \xi) = f(x) + q(y, z, \xi)$, alors il n'y a plus de problèmes (voir le corollaire 4.5).
- (ii) En appliquant exactement la même démarche, le théorème se généralise facilement à un problème de la forme

$$\begin{cases} Lu(x) + Q(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u + R(x, u(x)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où R est une application non-linéaire, aux hypothèses similaires à Q .

(iii) Si $Q = Q(x) = f(x)$, alors le résultat est superflu, car le problème (4.5) est déjà sous une forme inversible pour tout $(f, \varphi) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Démonstration. Nous reformulons le problème (4.1) en termes d'opérateurs afin d'appliquer la méthode du point fixe. Soient les espaces de fonctions

$$X_1 := C^{2,\beta}(\overline{\Omega}), \quad X_2 := C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

$$Y_1 := C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\beta}(\overline{\Omega}), \quad Y_2 := C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

équipés de leur norme usuelle. Soient les opérateurs $\mathcal{L}, \mathcal{Q} : X_2 \rightarrow Y_2$ définis par

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}u := (Lu, u),$$

$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}[u](x) := (Q(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) - Q(x, 0, 0, 0), 0),$$

de sorte que $\mathcal{Q}[0] \equiv 0$. Finalement, soit $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x) := (-Q(x, 0, 0, 0), \varphi(x)) \in Y_2$. Alors (4.5) est équivalent à

$$\mathcal{L}u + \mathcal{Q}[u] = \mathcal{F}.$$

Vérifions les hypothèses du théorème 2.4. D'une part (H_{XY}) est vraie par la proposition A.5. D'autre part, le choix de l'opérateur linéaire elliptique \mathcal{L} permet l'application du théorème B.4. Enfin, l'hypothèse (H'_Q) est vérifiée par le lemme 4.9. \square

Corollaire 4.5. Soient

- un entier $r \geq 0$, $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- $M > 0$, $p \in]\alpha, 1]$ et une application

$$q = q(y, z, \xi) \in C^{r+1,p}(P_M) \cap C^{1,1}(P_M)$$

satisfaisant $q(0, 0, 0) = 0$ et, pour tout $(y_i, z_i, \xi_i) \in P_M$,

$$|q(y_1, z_1, \xi_1) - q(y_2, z_2, \xi_2)| \leq C_0(|y_i|, |z_i|, |\xi_i|)|(y_1 - y_2, z_1 - z_2, \xi_1 - \xi_2)|,$$

où $C_0 : \mathbb{R}_+^6 \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction séparément croissante, avec $C_0(0) = 0$;

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|q\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq \lambda.$$

Alors il existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0$$

tel que pour tout $(f, \varphi) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\|f\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon. \tag{4.6}$$

le problème

$$\begin{cases} Lu + q(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. De plus, il existe une constante

$$K = K(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0$$

telle que

$$\begin{aligned}\|u\|_{C^{2,\beta}} &\leq K (\|f\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}}), \\ \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} &\leq K (\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,p}}).\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.3 avec

$$Q(x, y, z, \xi) := q(y, z, \xi) - f(x).$$

□

Remarque 4.6. Contrairement au cas général, le membre de droite de l'inégalité (4.6) ne dépend pas de f ou de φ .

L'exemple suivant est un problème pour lequel les variables du terme non-linéaire Q sont séparées en produit. Cette structure permet d'appliquer la méthode du point fixe avec des conditions de régularité plus faibles que les hypothèses 4.1.

Exemple 4.7. Considérons le problème

$$\begin{cases} \Delta u + |u| |\nabla u| = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

On constate que $Q(y, z) := |y||z| \in C_{\text{loc}}^{0,1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ et Q n'est pas dérivable en 0, cependant,

$$\mathcal{Q}[u] := |u| |\nabla u| \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}), \quad \forall u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}[u] - \mathcal{Q}[v]\|_{C^{0,\beta}} &\leq \| |u| |\nabla u| - |v| |\nabla v| \|_{C^{0,\beta}} + \| |u - v| |\nabla v| \|_{C^{0,\beta}} \\ &\leq (\|u\|_{C^{2,\beta}} + \|v\|_{C^{2,\beta}}) \|u - v\|_{C^{2,\beta}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\mathcal{Q}[u]\|_{C^{0,\alpha}} &\leq \|u\|_{C^0} \|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}} + \|u\|_{C^{0,\alpha}} \|\nabla u\|_{C^0} \\ &\leq \|u\|_{C^{2,\beta}} \|u\|_{C^{2,\alpha}},\end{aligned}$$

ce qui nous permet quand même d'appliquer la méthode du point fixe (théorème 2.4) et de trouver une solution $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Exemple 4.8. Pour $0 < p < 1$, le problème

$$\begin{cases} \Delta u + |\nabla^2 u|^{1+p} = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

n'entre pas dans le cadre des hypothèses 4.2, car

$$Q(\xi) = |\xi|^{1+p} \in C_{\text{loc}}^{1,p}(\mathbb{R}^{n \times n}) \setminus C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^{n \times n}).$$

4.2 Un lemme technique

Le lemme suivant est utilisé dans la preuve du théorème 4.3.

Lemme 4.9. Sous les hypothèses 4.1, supposons de plus que

$$Q(x, 0, 0, 0) = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (4.7)$$

Alors pour tout $u, v \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ tels que

$$\|u\|_{C^{r+2, \alpha}}, \|v\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq M,$$

les inégalités suivantes sont satisfaites

$$\|Q(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u) - Q(\text{id}, v, \nabla v, \nabla^2 v)\|_{C^{0, \beta}} \leq C_1(\|u\|_{C^{2, \beta}}, \|v\|_{C^{2, \beta}}) \|u - v\|_{C^{2, \beta}} \quad (4.8)$$

et

$$\|Q(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^{r, \alpha}} \leq C_2(\|u\|_{C^{2, \beta}}) \|u\|_{C^{r+2, \alpha}}. \quad (4.9)$$

où $C_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $C_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ sont des fonctions séparément croissantes indépendantes de u et v , et $C_1(0, 0) = C_2(0) = 0$.

Démonstration. La preuve se déroule en trois étapes.

Etape 1. Nous allons d'abord montrer quelques inégalités préliminaires. Posons

$$\mathcal{Q}[u](x) := Q(x, u(x), \nabla u, \nabla^2 u), \quad \forall u \in C^2(\overline{\Omega})$$

et similairement, $\mathcal{Q}_y[u]$, $\mathcal{Q}_z[u]$, $\mathcal{Q}_\xi[u]$. Ensuite, par (4.2) et (4.3), pour tout $(x, y, z, \xi) \in \overline{\Omega} \times P_M$,

$$|\mathcal{Q}_y(x, y, z, \xi)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x, y+h, z, \xi) - Q(x, y, z, \xi)}{h} \right| \leq C_0(|y|, |z|, |\xi|).$$

En particulier, ceci implique que

$$|\mathcal{Q}_y(x, 0, 0, 0)| \leq C_0(0) = 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

et, pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^0} \leq C_0(\|u\|_{C^0}, \|\nabla u\|_{C^0}, \|\nabla^2 u\|_{C^0}) \leq C_0(\|u\|_{C^2}).$$

Ensuite, si $r = 0$, pour tout $u \in C^{2, \alpha}(\overline{\Omega})$ tels que $\|u\|_{C^{2, \alpha}} \leq M$, nous avons, puisque Ω est borné,

$$(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u) \in C^{0, \alpha}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega} \times P_M) \quad \text{et} \quad \|(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^{0, \alpha}} \leq k_0 = k_0(M, \Omega),$$

d'où, par le théorème A.9.ii, puisque $\mathcal{Q}_y \in C^{0, 1}$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0, \alpha}} &= \|\mathcal{Q}_y \circ (\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u) - \mathcal{Q}_y \circ (\text{id}, 0, 0, 0)\|_{C^{0, \alpha}} \\ &\leq \|\mathcal{Q}_y\|_{C^{0, 1}} \|(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^0}^{1-\alpha} \\ &\leq k_1 \|u\|_{C^2}^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

avec $k_1 = k_1(p, \alpha, M, \Omega, \lambda) > 0$. De même, nous avons

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0,\beta}} \leq k_1 \|u\|_{C^2}^{1-\beta}.$$

Enfin, si $r \geq 1$, alors,

$$(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u) \in C^{0,1}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega} \times P_M) \quad \text{et} \quad \|(\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^{0,1}} \leq k_0 = k_0(M, \Omega),$$

d'où, par le théorème A.9.iii, puisque $\mathcal{Q}_y \in C^{r,p}$ avec $p > \alpha$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{r,\alpha}} &= \|\mathcal{Q}_y \circ (\text{id}, u, \nabla u, \nabla^2 u) - \mathcal{Q}_y \circ (\text{id}, 0, 0, 0)\|_{C^{r,\alpha}} \\ &\leq \|\mathcal{Q}_y\|_{C^{r,p}} \left(\|(0, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^0}^{p-\alpha} + \|(0, u, \nabla u, \nabla^2 u)\|_{C^{r,\alpha}} \right) \\ &\leq k_2 \left(\|u\|_{C^2}^{p-\alpha} + \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \right), \end{aligned}$$

avec $k_2 = k_2(p, r, \alpha, M, \Omega, \lambda) > 0$. De même, en appliquant le théorème A.9.i,

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0,\beta}} \leq k_2 \|u\|_{C^2}^{p-\beta}.$$

Pour terminer cette étape, nous appliquons le même raisonnement pour \mathcal{Q}_z et \mathcal{Q}_ξ , ce qui nous donne au final

– pour tout $x \in \overline{\Omega}$

$$\mathcal{Q}_y(x, 0, 0, 0) = \mathcal{Q}_z(x, 0, 0, 0) = \mathcal{Q}_\xi(x, 0, 0, 0) = 0;$$

– pour tout $r \geq 0$ et $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^0}, \|\mathcal{Q}_z[u]\|_{C^0}, \|\mathcal{Q}_\xi[u]\|_{C^0} \leq C_0(\|u\|_{C^2}); \quad (4.10)$$

– pour $r = 0$ et $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0,\alpha}}, \|\mathcal{Q}_z[u]\|_{C^{0,\alpha}}, \|\mathcal{Q}_\xi[u]\|_{C^{0,\alpha}} \leq k_1 \|u\|_{C^2}^{1-\alpha}, \quad (4.11)$$

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0,\beta}}, \|\mathcal{Q}_z[u]\|_{C^{0,\beta}}, \|\mathcal{Q}_\xi[u]\|_{C^{0,\beta}} \leq k_1 \|u\|_{C^2}^{1-\beta}; \quad (4.12)$$

– pour $r \geq 1$ et $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{r,\alpha}}, \|\mathcal{Q}_z[u]\|_{C^{r,\alpha}}, \|\mathcal{Q}_\xi[u]\|_{C^{r,\alpha}} \leq k_1 \left(\|u\|_{C^2}^{p-\alpha} + \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \right), \quad (4.13)$$

$$\|\mathcal{Q}_y[u]\|_{C^{0,\beta}}, \|\mathcal{Q}_z[u]\|_{C^{0,\beta}}, \|\mathcal{Q}_\xi[u]\|_{C^{0,\beta}} \leq k_1 \|u\|_{C^2}^{p-\beta}. \quad (4.14)$$

Dans la suite, nous séparons les cas $r = 0$ (étapes 2.1 et 2.2) et $r \geq 1$ (étapes 3.1 et 3.2). Nous notons $\gamma_i = \gamma_i(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda)$ des constantes.

Etape 2.1. Montrons (4.8) pour $r = 0$. En écrivant, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $(y_i, z_i, \xi_i) \in P_M$, $i = 1, 2$,

$$\begin{aligned} &Q(x, y_1, z_1, \xi_1) - Q(x, y_2, z_2, \xi_2) \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \{Q(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2, t\xi_1 + (1-t)\xi_2)\} dt \\ &= \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &\mathcal{Q}_y(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2, t\xi_1 + (1-t)\xi_2)(y_1 - y_2) \\ &+ \langle \mathcal{Q}_z(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2, t\xi_1 + (1-t)\xi_2); z_1 - z_2 \rangle \\ &+ \langle \mathcal{Q}_\xi(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2, t\xi_1 + (1-t)\xi_2); \xi_1 - \xi_2 \rangle \end{aligned} \right\} dt, \end{aligned}$$

nous avons, en particulier,

$$\mathcal{Q}[u](x) - \mathcal{Q}[v](x) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_y[tu + (1-t)v](x)(u(x) - v(x)) \\ + \langle \mathcal{Q}_z[tu + (1-t)v](x); \nabla u(x) - \nabla v(x) \rangle \\ + \langle \mathcal{Q}_\xi[tu + (1-t)v](x); \nabla^2 u(x) - \nabla^2 v(x) \rangle \end{array} \right\} dt.$$

En appliquant successivement le théorème A.7 et l'inégalité (4.12),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}[u] - \mathcal{Q}[v]\|_{C^{0,\beta}} &\leq \gamma_1 \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{Q}_y[tu + (1-t)v]\|_{C^{0,\beta}} \|u - v\|_{C^{0,\beta}} \\ + \|\mathcal{Q}_z[tu + (1-t)v]\|_{C^{0,\beta}} \|\nabla u - \nabla v\|_{C^{0,\beta}} \\ + \|\mathcal{Q}_\xi[tu + (1-t)v]\|_{C^{0,\beta}} \|\nabla^2 u - \nabla^2 v\|_{C^{0,\beta}} \end{array} \right\} dt \\ &\leq \gamma_2 \int_0^1 \|tu + (1-t)v\|_{C^2}^{1-\beta} \|u - v\|_{C^{2,\beta}} dt \\ &\leq \gamma_3 (\|u\|_{C^{2,\beta}} + \|v\|_{C^{2,\beta}})^{1-\beta} \|u - v\|_{C^{2,\beta}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien (4.8), avec

$$C_1(a_1, a_2) := \gamma_3(a_1 + a_2)^{1-\beta}, \quad \forall a_1, a_2 \geq 0.$$

Etape 2.2. Montrons (4.9) pour $r = 0$. Par l'hypothèse (4.7), nous pouvons écrire

$$\mathcal{Q}[u](x) = \mathcal{Q}[u](x) - \mathcal{Q}[0](x) = \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q}_y[tu](x)u(x) + \langle \mathcal{Q}_z[tu](x); \nabla u(x) \rangle \\ + \langle \mathcal{Q}_\xi[tu](x); \nabla^2 u(x) \rangle \end{array} \right\} dt$$

d'où, en appliquant successivement le théorème A.7 et les inégalités (4.10) et (4.11),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}[u]\|_{C^{0,\alpha}} &\leq \gamma_4 \int_0^1 \left\{ \begin{array}{l} \|\mathcal{Q}_y[tu]\|_{C^0} \|u\|_{C^{0,\alpha}} + \|\mathcal{Q}_y[tu]\|_{C^{0,\alpha}} \|u\|_{C^0} \\ + \|\mathcal{Q}_z[tu]\|_{C^0} \|\nabla u\|_{C^{0,\alpha}} + \|\mathcal{Q}_z[tu]\|_{C^{0,\alpha}} \|\nabla u\|_{C^0} \\ + \|\mathcal{Q}_\xi[tu]\|_{C^0} \|\nabla^2 u\|_{C^{0,\alpha}} + \|\mathcal{Q}_\xi[tu]\|_{C^{0,\alpha}} \|\nabla^2 u\|_{C^0} \end{array} \right\} dt \\ &\leq \gamma_5 \left(C_0(\|u\|_{C^2}) \|u\|_{C^{2,\alpha}} + \|u\|_{C^2}^{1-\alpha} \|u\|_{C^0} \right) \\ &\leq \gamma_6 \left(C_0(\|u\|_{C^{2,\beta}}) + \|u\|_{C^{2,\beta}}^{1-\alpha} \right) \|u\|_{C^{2,\alpha}} \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien (4.9), avec

$$C_2(a) := \gamma_6(C_0(a) + a^{1-\alpha}), \quad \forall a \geq 0.$$

Etape 3.1. Montrons (4.8) pour $r \geq 1$. Pour alléger l'écriture, nous supposons que $Q = Q(x, y)$, car, contrairement au cas $r = 0$, la présence de dérivées secondes de u dans $Q[u]$ ne change pas les hypothèses de régularité et les inégalités (4.13), (4.14) restent vraies.

En écrivant, pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $|y_1|, |y_2| \leq M$,

$$Q(x, y_1) - Q(x, y_2) = \int_0^1 Q_y(x, ty_1 + (1-t)y_2)(y_1 - y_2) dt,$$

nous avons, en particulier,

$$Q(x, u(x)) - Q(x, v(x)) = \int_0^1 Q_y(x, tu(x) + (1-t)v(x))(u(x) - v(x)) dt.$$

En appliquant successivement le théorème A.7 et l' inégalité (4.13),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}[u] - \mathcal{Q}[v]\|_{C^{0,\beta}} &\leq \gamma_1 \int_0^1 \|\mathcal{Q}_y(tu + (1-t)v)\|_{C^{0,\beta}} \|u - v\|_{C^{0,\beta}} dt \\ &\leq \gamma_2 \int_0^1 \left(\|tu + (1-t)v\|_{C^0}^{p-\beta} + \|tu + (1-t)v\|_{C^{0,\beta}} \right) \|u - v\|_{C^{0,\beta}} \\ &\leq \gamma_3 (\|u\|_{C^{2,\beta}} + \|v\|_{C^{2,\beta}})^{p-\beta} \|u - v\|_{C^{2,\beta}}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien (4.8), avec

$$C_1(a_1, a_2) := \gamma_3(a_1 + a_2)^{p-\beta}, \quad \forall a_1, a_2 \geq 0.$$

Etape 3.2. Montrons (4.9). En écrivant

$$Q(x, u(x)) = Q(x, u(x)) - Q(x, 0) = \int_0^1 Q_y(x, tu(x))u(x) dt,$$

nous avons, en appliquant successivement le théorème A.7 et les inégalités (4.10) et (4.13),

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}[u]\|_{C^{r,\alpha}} &\leq \gamma_4 \int_0^1 (\|\mathcal{Q}_y[tu]\|_{C^0} \|u\|_{C^{r,\alpha}} + \|\mathcal{Q}_y[tu]\|_{C^{r,\alpha}} \|u\|_{C^0}) dt \\ &\leq \gamma_5 \left(C_0(\|u\|_0, \|u_0\|) \|u\|_{C^{r,\alpha}} + \left(\|u\|_{C^0}^{p-\alpha} + \|u\|_{C^{r,\alpha}} \right) \|u\|_{C^0} \right) \\ &\leq \gamma_6 \left(C_0(\|u\|_{C^{2,\beta}}, \|u\|_{C^{2,\beta}}) + \|u\|_{C^{2,\beta}}^{p-\alpha} \right) \|u\|_{C^{r+2,\alpha}}, \end{aligned}$$

ce qui nous donne bien (4.9), avec

$$C_2(a) := \gamma_6(C_0(a, a) + a^{p-\alpha}), \quad \forall a \geq 0.$$

□

4.3 Cas particulier : le problème semi-linéaire

Le problème semi-linéaire

$$\begin{cases} Lu(x) + Q(x, u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

est un cas particulier de l'équation (4.1), pour lequel les hypothèses sont ici plus faibles que dans le théorème 4.3.

Hypothèse 4.10. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$;

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- un opérateur

$$Lu = Lu(x) := \langle A(x); \nabla^2 u(x) \rangle + \langle b(x); \nabla u(x) \rangle + c(x)u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

tel que $A \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n \times n})$ et est définie strictement positive sur $\overline{\Omega}$, $b \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $c \leq 0$;

- un scalaire $M > 0$ et une application $Q = Q(x, y) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega} \times [-M, M])$ telle que

$$y \mapsto Q(x, y) \in C^1([-M, M]), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \text{si } r = 0,$$

$$Q_y := \frac{\partial Q}{\partial y} \in C^{r,p}(\overline{\Omega} \times [-M, M])$$

pour un certain $p \in]\alpha, 1]$. De plus, Q satisfait l'inégalité

$$|Q(x, y_1) - Q(x, y_2)| \leq C_0(|y_1|, |y_2|)|y_1 - y_2|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad |y_i| \leq M \quad (4.15)$$

avec $C_0 \in C^0(\mathbb{R}_+^2; \mathbb{R}_+)$ séparément croissante et $C_0(0, 0) = 0$;

- Une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|Q_y\|_{C^{r,p}} \leq \lambda.$$

Remarque 4.11. Les hypothèses de régularité sur Q sont, dans le cas $r = 0$, légèrement plus faibles que celles des hypothèses 4.1, à cause de l'absence de dérivées secondes de u dans Q .

Théorème 4.12. Sous les hypothèses 4.10, il existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0,$$

tel que pour tout $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant l'inégalité

$$\|Q(\cdot, 0)\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu(x) + Q(x, u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.16)$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. De plus, il existe une constante

$$K = K(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0$$

telle que

$$\|u\|_{C^{2,\beta}} \leq K(\|Q(\cdot, 0)\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}}),$$

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K(\|Q(\cdot, 0)\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}}),$$

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème 4.3, à la seule différence que l'hypothèse (H'_Q) se vérifie, pour le cas $r = 0$, par un lemme technique similaire au lemme 4.9. \square

Hypothèse 4.13.

- un entier $r \geq 0$, $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- $M > 0$, $p \in]\alpha, 1]$ et $q \in C^{r+1,p}[-M, M]$ satisfaisant $q(0) = 0$ et

$$|q(y_1) - q(y_2)| \leq C_0(|y_1|, |y_2|)|y_1 - y_2|, \quad \forall |y_1|, |y_2| \leq M$$

avec $C_0 \in C^0(\mathbb{R}_+^2; \mathbb{R}_+)$ séparément croissante et $C_0(0, 0) = 0$;

- Une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|q\|_{C^{r+1,p}} \leq \lambda.$$

Corollaire 4.14. Sous les hypothèses 4.13, il existe

$$\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0$$

tel que le problème

$$\begin{cases} Lu + q(u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $(f, \varphi) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tels que

$$\|f\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon.$$

De plus, il existe une constante

$$K = K(r, \alpha, \beta, p, \Omega, M, \lambda) > 0$$

telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\beta}} &\leq K (\|f\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}}), \\ \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} &\leq K (\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}}), \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 4.12 avec

$$Q = Q(x, y) := q(y) - f(x).$$

□

Exemple 4.15. Soient $p \geq 1$ et l'application $q(u) := u|u|^p \in C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$. Pour tout $|u|, |v| \leq 1$, nous avons

$$\begin{aligned} |q(u) - q(v)| &\leq |u|u|^p - v|v|^p| \\ &\leq |u - v| |u|^p + |v| ||u|^p - |v|^p| \\ &\leq (|u|^p + p|v|) |u - v| \\ &\leq p (|u|^p + |v|) |u - v|. \end{aligned}$$

Ainsi, pour $0 < \beta \leq \alpha < 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert de classe $C^{2,\alpha}$, par le corollaire 4.14, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si

$$\|f\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème

$$\begin{cases} \Delta u + u|u|^p = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq K (\|f\|_{C^{0,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{2,\alpha}}),$$

où $K > 0$ est une constante.

4.4 Exemple : l'équation des surfaces minimales

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et connexe. Pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, soit l'opérateur

$$Mu := \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = (1 + |\nabla u|^2) \Delta u - \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j}.$$

Nous considérons ici le problème de dirichlet associé à l'équation des surfaces minimales

$$\begin{cases} Mu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Un résultat classique d'existence est donné par Jenkins-Serrin [39].

Théorème 4.16 (Jenkins-Serrin). Soient $r \geq 0$ entier, $0 < \alpha < 1$. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, connexe et de classe $C^{r+2,\alpha}$. Alors le problème (4.17) admet une solution dans $C^{r+2,\alpha}$ pour tout $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ si et seulement si la courbure moyenne de Ω est positive sur $\partial\Omega$.

Démonstration. Voir Gilbarg-Trudinger [34], théorème 14.14. □

L'application de la méthode du point fixe donne le résultat suivant.

Théorème 4.17. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, soit également $0 < \beta \leq \alpha < 1$. Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \Omega) > 0$ tel que pour tout $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème (4.17) admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}$. De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, \Omega) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{2,\beta}} &\leq K \|\varphi\|_{C^{2,\beta}} \cdot \\ \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} &\leq K \|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \cdot \end{aligned}$$

Remarque 4.18.

1. Ce résultat est un léger raffinement du théorème de Korn-Müntz (voir [11], théorème 5.30), qui impose l'hypothèse

$$\|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq \varepsilon.$$

2. Il est intéressant de comparer ce résultat avec le théorème de Jenkins-Serrin : nous n'imposons aucune condition géométrique sur Ω , mais nous exigeons que la norme $C^{2,\beta}$ de la donnée φ soit petite.

Démonstration. Nous remarquons d'abord que

$$Mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta u = \sum_{i,j=1}^n u_{x_i} u_{x_j} u_{x_i x_j} - |\nabla u|^2 \Delta u,$$

d'où le problème équivalent

$$\begin{cases} \Delta u = Q(u, \nabla u) & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.18)$$

avec

$$Q(z, \xi) := \sum_{i,j=1}^n z_i z_j \xi_i^j - |z|^2 \text{tr}(\xi), \quad \forall (z, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}.$$

La résolution de (4.18) par la méthode du point fixe et donnée par le théorème 4.3, pour lequel il suffit de vérifier l'inégalité (4.15), ce qui est trivial, puisque Q est uniquement constitué de monômes de degré trois. \square

CHAPITRE 5

EQUATIONS ELLIPTIQUES FORTEMENT NON-LINÉAIRES : LE PROBLÈME DE DIRICHLET

Dans ce chapitre, nous traitons le problème de Dirichlet pour une équation non-linéaire générale de la forme

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.1)$$

pour lequel nous montrerons un théorème d'existence grâce aux résultats du chapitre précédent. Nous appliquerons ce résultat à deux cas particuliers importants : l'équation de Monge-Ampère

$$\det(\nabla^2 u) = f$$

et les équations hessiennes

$$S_k(\nabla^2 u) = f, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Les équations non-linéaire du type (5.1) ont reçu une attention considérable depuis le début du 20^e siècle pour leurs applications en géométrie, notamment par Aleksandrov, Bakel'man, Bernstein, Caffarelli, Calabi, Delanoë, Evans, Guan, Krylov, Kutev, Lewy, Lions, Minkowski, Miranda, Nirenberg, Pogorelov, Safonov, Spruck, Trudinger, Urbas et Wang. Voir Krylov [44] pour un historique complet sur ce problème.

5.1 Le résultat principal

Nous commençons par fixer des notations qui seront utilisées tout au long du chapitre.

Notation 5.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $F = F(x, y, z, \xi)$. Alors pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, nous notons

$$F[u] = F[u](x) := F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Hypothèse 5.2. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2, \alpha}$;
- un scalaire $M > 0$, l'ensemble P_M défini par

$$P_M := \{(y, z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} : |y|, |z|, |\xi| \leq M\},$$

et une application $F = F(x, y, z, \xi) \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega} \times P_M) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M)$ telle que

$$(y, z, \xi) \mapsto F(x, y, z, \xi) \in C^1(P_M), \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad \text{si } r = 0, \quad (5.2)$$

$$F_y := \frac{\partial F}{\partial y} \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M),$$

$$F_z := \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_{i=1}^n \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n),$$

$$F_\xi := \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}} \right)_{i, j=1}^n \in C^{r, p}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}) \cap C^{0, 1}(\overline{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}),$$

pour un certain $p \in]\alpha, 1]$;

- un scalaire $\lambda > 0$ tel que

$$\|F_y\|_{C^{r, p}}, \|F_z\|_{C^{r, p}}, \|F_\xi\|_{C^{r, p}} \leq \lambda$$

ou, si $r = 0$,

$$\|F_y\|_{C^{0, 1}}, \|F_z\|_{C^{0, 1}}, \|F_\xi\|_{C^{0, 1}} \leq \lambda;$$

- une fonction $\varphi \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ tel que

$$\varphi(\overline{\Omega}) \times \nabla \varphi(\overline{\Omega}) \times \nabla^2 \varphi(\overline{\Omega}) \subset P_{M/2}.$$

Voici le résultat principal du chapitre.

Théorème 5.3. Sous la notation 5.1 et les hypothèses 5.2, supposons de plus qu'il existe une constante d'ellipticité $\Lambda > 0$ telle que

$$\langle F_\xi[\varphi](x)p; p \rangle \geq \Lambda |p|^2, \quad \forall (x, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \quad (5.3)$$

et

$$F_y[\varphi](x) \leq 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (5.4)$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \Omega, M, \lambda, \Lambda) > 0$, tel que si F satisfait l'inégalité

$$\|F[\varphi]\|_{C^{0, \beta}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon$$

alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} F[u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.5)$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. De plus, il existe des constantes

$$K_i = K_i(r, \alpha, \beta, \Omega, M, \lambda, \Lambda) > 0, \quad i = 1, 2,$$

telles que

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K_1 \|F[\varphi]\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})}, \quad (5.6)$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K_1 \|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \quad (5.7)$$

$$\langle F_\xi[u](x)p; p \rangle \geq K_2 |p|^2, \quad \forall (x, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n. \quad (5.8)$$

Remarque 5.4.

- (i) Il est intéressant de constater que nous n'imposons aucune contrainte sur la géométrie du domaine Ω , contrairement à ce qu'on trouve dans la littérature classique (voir Gilbarg-Trudinger [34], théorème 17.17). En contrepartie, nous exigeons l'hypothèse de petitesse des données

$$\|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon.$$

Nous ferons une comparaison plus précise dans le cas de l'équation de Monge-Ampère (section 5.3).

- (ii) Comme pour la remarque 4.2, il est possible de réduire les hypothèses de régularité si F possède une structure particulière. Par exemple, si F_y et F_z ne dépendent pas de ξ , alors, dans le cas $r = 0$, il suffit que F_y et F_z soient de classe $C^{0,p}$. Ceci sera le cas pour l'équation de Monge-Ampère (théorème 5.16).
- (iii) L'énoncé et la preuve du théorème 5.3 se base sur la linéarisation de l'opérateur F autour de la donnée de bord φ . De manière plus générale, en suivant exactement la même démarche, il est possible de linéariser F autour de n'importe quelle fonction $\omega \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, et, après ajustement des hypothèses autour de ω , nous obtenons l'existence d'une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u - \omega\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K (\|F[\omega]\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi - \omega\|_{C^{r+2,\alpha}})$$

si

$$\|F[\omega]\|_{C^{0,\beta}} + \|\varphi - \omega\|_{C^{2,\beta}} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Nous allons transformer le problème (5.5) afin de pouvoir lui appliquer le théorème 4.3. La preuve se déroule en trois étapes.

Etape 1. Soit u une solution de (5.5), et posons $v := u - \varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. L'hypothèse 5.2 nous permet d'écrire

$$F[u] = F[v + \varphi] = F[\varphi] + Lv + Q[v]$$

avec, pour tout $v \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$Lv := \langle F_\xi[\varphi]; \nabla^2 v \rangle + \langle F_z[\varphi]; \nabla v \rangle + F_y[\varphi]v,$$

et

$$\begin{aligned} Q[v] &= Q(x, v(x), \nabla v(x), \nabla^2 v(x)) \\ &:= F[\varphi + v] - F[\varphi] - F_y[\varphi]v - \langle F_z[\varphi]; \nabla v \rangle - \langle F_\xi[\varphi]; \nabla^2 v \rangle. \end{aligned}$$

Par conséquent, le problème (5.5) est équivalent à

$$\begin{cases} Lv = -F[\varphi] + Q[v] & \text{dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.9)$$

Etape 2. Par le lemme 5.5, $F[\varphi] \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$. Ensuite, les hypothèses (5.3) et (5.4) et le théorème B.4 impliquent que L est un opérateur linéaire elliptique inversible à droite. Enfin, $Q(x, 0, 0, 0) = Q[0] = 0$ et le lemme 5.6 nous montre que Q satisfait les hypothèses 4.1.

Nous pouvons ainsi appliquer le théorème 4.3 qui nous donne l'existence d'une solution pour (5.9) si

$$\|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}} = \|F(\text{id}, \varphi, \nabla \varphi, \nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

ainsi que les inégalités (5.6) et (5.7).

Etape 3. Il reste encore à montrer l'inégalité (5.8). Puisque $F_\xi \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times P_M)$, alors, utilisant (5.7),

$$\|F_\xi[u] - F_\xi[\varphi]\|_{C^0} \leq \|F_\xi\|_{C^{0,1}} \|u - \varphi\|_{C^2} \leq K_1 \lambda \varepsilon,$$

et donc, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle F_\xi[u](x)p; p \rangle &= \langle F_\xi[\varphi](x)p; p \rangle + \langle [F_\xi[u](x) - F_\xi[\varphi](x)]p; p \rangle \\ &\geq (\Lambda - 2K_1 \lambda_2 \varepsilon) |p|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à choisir $\varepsilon < \frac{\Lambda}{2K\lambda_2}$, nous avons bien (5.8), ce qui termine la preuve. \square

5.2 Lemmes techniques

Lemme 5.5. Sous les hypothèses 5.2, pour tout $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tel que

$$u(\overline{\Omega}) \times \nabla u(\overline{\Omega}) \times \nabla^2 u(\overline{\Omega}) \subset P_M,$$

alors

$$F[u] \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. Si $r = 0$ et $\alpha = 0$, alors F est continue car composition de fonctions continues. Le cas $r \geq 1$ découle du théorème A.8. Le cas $r = 0$ et $0 < \alpha < 1$ étant plus délicat, nous le démontrons entièrement. Posons $U := (u, \nabla u, \nabla^2 u) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}; P_M)$. Puisque $F \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times P_M)$, alors

$$|F(x, p_1) - F(x, p_2)| \leq [F]_{C^{0,1}} |p_1 - p_2|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, p_1, p_2 \in P_M,$$

d'où, pour tout $x_1, x_2 \in \bar{\Omega}$, $x_1 \neq x_2$,

$$\begin{aligned}
|F(x_1, U(x_1)) - F(x_2, U(x_2))| &\leq |F(x_1, U(x_1)) - F(x_2, U(x_1))| \\
&\quad + |F(x_2, U(x_1)) - F(x_2, U(x_2))| \\
&\leq [F]_{C^{0,\alpha}} |x_1 - x_2|^\alpha + [F]_{C^{0,1}} |U(x_1) - U(x_2)| \\
&\leq ([F]_{C^{0,\alpha}} + [F]_{C^{0,1}} [U]_{C^{0,\alpha}}) |x_1 - x_2|^\alpha \\
&\leq ([F]_{C^{0,\alpha}} + [F]_{C^{0,1}} [u]_{C^{2,\alpha}}) |x_1 - x_2|^\alpha,
\end{aligned}$$

d'où la conclusion. \square

Lemme 5.6. Sous la notation 5.1 et les hypothèses 5.2, soit l'application $Q : \bar{\Omega} \times P_{M/2} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned}
Q(x, y, z, \xi) &:= F(x, \varphi(x) + y, \nabla \varphi(x) + z, \nabla^2 \varphi(x) + \xi) \\
&\quad - F(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x), \nabla^2 \varphi(x)) - F_y(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x), \nabla^2 \varphi(x)) y \\
&\quad - \langle F_z(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x), \nabla^2 \varphi(x)) ; z \rangle \\
&\quad - \langle F_\xi(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x), \nabla^2 \varphi(x)) ; \xi \rangle.
\end{aligned}$$

Alors pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $(y_i, z_i, \xi_i) \in P_{M/2}$, il existe une constante $K > 0$ nous avons l'inégalité

$$|Q(x, y_1, z_1, \xi_1) - Q(x, y_2, z_2, \xi_2)| \leq K(|y_i|, |z_i|, |\xi_i|)(y_1 - y_2, z_1 - z_2, \xi_1 - \xi_2) \quad (5.10)$$

pour tout $(x_i, y_i, z_i) \in P_{M/2}$.

Démonstration. Par les hypothèses 5.2, il est évident que $Q \in C^{r,\alpha}(\bar{\Omega} \times P_{M/2})$ et, vu que

$$Q_y(x, y, z, \xi) = F_y(x, \varphi(x) + y, \nabla \varphi(x) + z, \nabla^2 \varphi(x) + \xi) - F_y(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x), \nabla^2 \varphi(x)),$$

nous avons également $Q_y \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times P_{M/2}) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times P_{M/2})$. De même pour Q_z et Q_ξ .

Montrons l'inégalité (5.10). Pour alléger l'écriture, nous supposons sans perte de généralité que $\varphi \equiv 0$, quitte à remplacer $F(x, y, z, \xi)$ par $F(x, \varphi(x) + y, \nabla \varphi(x) + z, \nabla^2 \varphi(x) + \xi)$. Soient $x \in \bar{\Omega}$ et $p_i := (y_i, z_i, \xi_i) \in P_{M/2}$, $i = 1, 2$. Alors

$$\begin{aligned}
&Q(x, y_1, z_1, \xi_1) - Q(x, y_2, z_2, \xi_2) \\
&= F(x, p_1) - F(x, p_2) - F_y(x, 0)(y_1 - y_2) - \langle F_z(x, 0); z_1 - z_2 \rangle - \langle F_\xi(x, 0); \xi_1 - \xi_2 \rangle \\
&= \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} &[F_y(x, tp_1 + (1-t)p_2) - F_y(x, 0)](y_1 - y_2) \\ &+ \langle F_z(x, tp_1 + (1-t)p_2) - F_z(x, 0); z_1 - z_2 \rangle \\ &+ \langle F_\xi(x, tp_1 + (1-t)p_2) - F_\xi(x, 0); \xi_1 - \xi_2 \rangle \end{aligned} \right\} dt.
\end{aligned}$$

Puisque F_y , F_z et F_ξ sont de classe $C^{0,1}$ et

$$\|F_y\|_{C^{0,1}}, \|F_z\|_{C^{0,1}}, \|F_\xi\|_{C^{0,1}} \leq \lambda;$$

nous avons donc

$$\begin{aligned}
|Q(x, y_1, z_1, \xi_1) - Q(x, y_2, z_2, \xi_2)| &\leq \lambda \int_0^1 |tp_1 + (1-t)p_2| |p_1 - p_2| dt \\
&\leq \lambda(|p_1| + |p_2|) |p_1 - p_2|,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. \square

5.3 L'équation de Monge-Ampère

L'équation de Monge-Ampère, qui s'exprime

$$\det(\nabla^2 u) = f \quad \text{dans } \Omega$$

est une des équations non-linéaire du second ordre les plus étudiées, ayant d'importantes applications en géométrie et en théorie du transport optimal. Citons Caffarelli-Nirenberg-Spruck [5], Guan [36], Kutev [45], Trudinger-Wang [60], Urbas [67] et Wang [72]. Voir également Trudinger-Wang [61] pour un historique complet.

Définition 5.7. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. Une fonction $\varphi \in C^2(\Omega)$ est dite *uniformément convexe* si et seulement si sa matrice hessienne est uniformément définie positive sur Ω ; c'est-à-dire il existe une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$\langle \nabla^2 \varphi(x) p; p \rangle \geq \Lambda |p|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n.$$

Pour abréger l'écriture, nous noterons

$$\nabla^2 \varphi \geq \Lambda > 0.$$

De manière équivalente, les valeurs propres de $\nabla^2 \varphi$ sont strictement positives, uniformément en $x \in \Omega$.

Remarque 5.8. Si Ω est borné et $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$, alors la définition précédente est équivalente à *strictement convexe*, c'est-à-dire

$$\langle \nabla^2 \varphi(x) p; p \rangle > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n.$$

De manière équivalente, les valeurs propres de $\nabla^2 \varphi$ sont strictement positives sur $\overline{\Omega}$.

Nous commençons par un lemme élémentaire.

Lemme 5.9. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^n$ symétrique. Alors

$$A > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{adj}_{n-1}(A) > 0 \\ \det(A) > 0, \end{cases}$$

Démonstration. Le lemme découle immédiatement du fait que si A est définie positive, alors $\det(A) > 0$ et de

$$A \cdot \text{adj}_{n-1}(A) = \det(A) I_n.$$

□

Hypothèse 5.10. Soient

- $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2, \alpha}$;
- une fonction $\varphi \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ uniformément convexe et une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq \lambda.$$

Théorème 5.11. Sous les hypothèses 5.10, il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $f > 0$ et

$$\|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (5.11)$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ uniformément convexe et satisfaisant

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K \|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}}, \quad (5.12)$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}}. \quad (5.13)$$

où $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$ est une constante.

Remarque 5.12. Il est intéressant de comparer ce théorème avec Trudinger-Wang [60] : le problème (5.11) est résoluble dans $C^{2,\alpha}$ sous les hypothèses

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, uniformément convexe et de classe C^3 ;
- $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, avec $0 < \alpha < 1$, $f > 0$;
- $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$, fortement convexe.

En fixant la convexité uniforme de Ω , Wang [72] a montré que les hypothèses de régularité sont optimales (voir exemples 5.13 et 5.14) ; il n'est donc pas possible d'améliorer globalement la régularité des données. Il est par contre possible d'améliorer « localement » les données ; le théorème 5.11 permet la résolution du problème avec les améliorations suivantes :

- généralisation de la géométrie de Ω (non-nécessairement convexe),
- gain de régularité sur Ω et φ ($C^{2,\alpha}$ au lieu de C^3).

Par contre on exige que les données f et φ soient « proches » ; plus précisément

$$\|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

où $\varepsilon > 0$, dont l'existence est donnée par le théorème 5.11, ne dépend pas de f . Cette restriction ne peut être enlevée, car cela contredirait la non-existence de solutions montrée par Wang.

Démonstration. Posons

$$F(x, \xi) := \det(\xi) - f(x) \in C_{\text{loc}}^{r,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{n \times n}),$$

d'où

$$F_y \equiv F_z \equiv 0, \quad F_\xi(x, \xi) = F_\xi(\xi) = \text{adj}_{n-1}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n \times n}; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Etape 1. Pour appliquer le théorème 5.3, il suffit de vérifier l'hypothèse d'ellipticité (5.3), c'est-à-dire

$$\langle \text{adj}_{n-1}(\nabla^2 \varphi(x))p; p \rangle \geq \Lambda |p|^2, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \quad p \in \mathbb{R}^n,$$

où, de manière équivalente, puisque Ω est borné (voir remarque 5.8),

$$\text{adj}_{n-1}(\nabla^2 \varphi(x)) > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Ceci est une conséquence immédiate de la convexité uniforme de φ et du lemme 5.9.

Enfin, vu que $F_y \equiv 0$, l'hypothèse (5.4) n'est pas à vérifier, ce qui nous donne l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que si $f \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfait

$$\|F(\text{id}, \nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} = \|f - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

alors (5.11) admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant les inégalités (5.12) et (5.13).

Etape 2. Montrons que u est uniformément convexe. Le théorème 5.3 implique qu'une solution u obtenue par l'étape 1 satisfait (voir remarque 5.8)

$$\text{adj}_{n-1}(\nabla^2 u) > 0.$$

Puisque f est continue sur $\overline{\Omega}$, il existe un certain $M > 0$ tel que

$$\det(\nabla^2 u(x)) = f(x) \geq M, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Par le lemme 5.9, nous avons directement

$$\nabla^2 u > 0 \quad \text{sur } \overline{\Omega},$$

ce qui prouve que u est uniformément convexe. \square

Les deux exemples suivants, donnés par Wang [72], montrent que le résultat d'existence de Trudinger-Wang [60] est optimal. Nous noterons $B_r(c) \subset \mathbb{R}^2$ la boule de rayon $r > 0$ et de centre $c \in \mathbb{R}^2$.

Exemple 5.13. Soient $c_1 := (0, 1) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega := B_1(c_1) \subset \mathbb{R}^2$ et $\varphi(x, y) := |x|^3 + y^2 \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que toute solution u au problème

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(x) = \varepsilon & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

est telle que

$$u \notin W^{2,p}(\Omega), \quad \forall p \geq 3.$$

En particulier, $u \notin C^2(\overline{\Omega})$.

Exemple 5.14. Soient $c_1 := (0, 1), c_2 := (0, 2) \in \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine strictement convexe de classe $C^{2,1}$ tel que

$$B_1(c_1) \subset \Omega \subset B_2(c_2)$$

et dont le bord est représenté autour de l'origine par la fonction

$$y = \rho(x) = \frac{1}{2}x^2 - |x|^3.$$

Soit $\varphi(x, y) := y^4 + \frac{1}{2}x^2 + y^2 - y$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ suffisamment petit tel que toute solution u au problème

$$\begin{cases} \det \nabla^2 u(x) = \varepsilon & \text{sur } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

est telle que

$$u \notin W^{2,p}(\Omega), \quad \forall p \geq 3.$$

En particulier, $u \notin C^2(\overline{\Omega})$.

Le résultat suivant est une généralisation du théorème 5.11 pour une donnée f dépendant des dérivées d'ordre inférieur de u .

Hypothèse 5.15. Soient

- $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- un scalaire $M > 0$ et l'ensemble \tilde{P}_M défini par

$$\tilde{P}_M := \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |y|, |z| \leq M\};$$

- une application $f = f(x, y, z) \in C^{r,\alpha}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M)$, $f > 0$, telle que

$$(y, z) \mapsto f(x, y, z) \in C^1(\tilde{P}_M), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \text{si } r = 0,$$

$$f_y \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M), \quad f_z \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M; \mathbb{R}^n)$$

pour un certain $p \in]\alpha, 1]$;

- une fonction $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ uniformément convexe telle que

$$\varphi(\bar{\Omega}) \times \nabla \varphi(\bar{\Omega}) \subset \tilde{P}_{M/2}$$

et

$$f_y(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x)) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}; \quad (5.14)$$

- un scalaire $\lambda > 0$ tel que

$$\|f_y\|_{C^{r,p}}, \|f_z\|_{C^{r,p}}, \|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq \lambda$$

Théorème 5.16. Sous la notation 5.1 et les hypothèses 5.15, il existe

$$\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, M, \lambda) > 0$$

tel que si f et φ satisfont l'inégalité

$$\|f[\varphi] - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f[u] & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ uniformément convexe et satisfaisant

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K \|f[\varphi] - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}},$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f[\varphi] - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}},$$

où $K = K(\alpha, \beta, r, \Omega, M, \lambda) > 0$ est une constante.

Remarque 5.17. Les hypothèses de régularité sur f sont, dans le cas $r = 0$, plus faible que celle demandées dans le théorème 5.3, qui sera invoqué dans la preuve, car f ne dépend pas de $\nabla^2 u$ (voir remarque 5.4).

Démonstration. Posons

$$F(x, y, z, \xi) := \det(\xi) - f(x, y, z) \in C_{\text{loc}}^{r, \alpha}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M \times \mathbb{R}^{n \times n}),$$

d'où

$$F_y = -f_y(x, y, z) \in C^{r, p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M), \quad F_z = -f_z(x, y, z) \in C^{r, p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M; \mathbb{R}^n),$$

$$F_\xi = F_\xi(\xi) = \text{adj}_{n-1}(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n \times n}; \mathbb{R}^{n \times n}).$$

L'ellipticité (5.3) découle du fait que φ est uniformément convexe et l'inégalité (5.4) découle de (5.14). Le reste de la preuve est identique à celle du théorème 5.11. \square

5.4 Equations hessiennes

Les *équations hessiennes* sont des équations différentielles faisant intervenir les valeurs propres de la matrice hessienne $\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$:

$$S_k(\nabla^2 u) = f, \quad k = 1, \dots, n.$$

En particulier,

$$S_1(\nabla^2 u) = \text{tr}(\nabla^2 u) = \Delta u \quad \text{et} \quad S_n(\nabla^2 u) = \det(\nabla^2 u),$$

correspondent respectivement l'équation de Poisson et l'équation de Monge-Ampère. Les premiers résultats importants concernant les équations hessiennes (et de manière générale, les équations elliptiques dépendant des valeurs propres de $\nabla^2 u$) ont été obtenus par Caffarelli-Nirenberg-Spruck [6], qui montrent l'existence de solutions régulières pour le problème de Dirichlet, sous la condition que le domaine soit k -convexe. Voir également Jiang-Trudinger-Yang [40], Trudinger [58], Urbas [68], [70] et Wang [73].

Définition 5.18 (k -trace). Pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symétrique, nous notons $\{\lambda_i(A)\}_{i=1}^n$ les n valeurs propres réelles de A , et définissons, pour tout $1 \leq k \leq n$, la k -trace de A ou le k -^{ème} polynôme symétrique élémentaire des valeurs propres de A :

$$S_k(A) := \sigma_k(\lambda_{i_1}(A), \dots, \lambda_{i_n}(A)) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \lambda_{i_1}(A) \dots \lambda_{i_k}(A).$$

Définition 5.19 (k -convexité). Soient $1 \leq k \leq n-1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné et $u \in C^2(\bar{\Omega})$. Soient $\chi_1, \dots, \chi_{n-1}$ les courbures principales du bord $\partial\Omega$.

(i) Ω est *uniformément k -convexe* si

$$\sigma_j(\chi_1, \dots, \chi_{n-1}) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq n-2} \chi_{i_1} \dots \chi_{i_j} > 0, \quad \forall 1 \leq j \leq k.$$

En particulier, si $k = n-1$, alors Ω est *uniformément convexe*

(ii) u est *uniformément k -convexe* si

$$S_j(\nabla^2 u(x)) > 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad 1 \leq j \leq k.$$

Le résultat suivant est l'application du théorème 5.3 pour les équations hessiennes.

Théorème 5.20. Soient

- $r \in \mathbb{N}$, $0 < \beta \leq \alpha < 1$ et $2 \leq k \leq n$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\langle \nabla S_k(\nabla^2 \varphi(x))p; p \rangle > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n;$$

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq \lambda. \quad (5.15)$$

Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $f > 0$ et l'inégalité

$$\|f - S_k(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon, \quad (5.16)$$

alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} S_k(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K_1 \|f - S_k(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}},$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K_1 \|f - S_k(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}},$$

et

$$\langle \nabla S_k(\nabla^2 u(x))p; p \rangle > 0, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, p \in \mathbb{R}^n.$$

où $K_i = K_i(\alpha, \beta, r, \Omega, \lambda) > 0$.

Remarque 5.21. Comme pour l'équation de Monge-Ampère, la méthode du point fixe n'impose aucune restriction sur la géométrie du domaine Ω et réduit les hypothèses de régularité sur les données (comparer avec Trudinger [58]). La contre-partie reste encore la petitesse des données (5.16).

Démonstration. En vue de l'application du théorème 5.3, posons

$$F(x, y, z, \xi) := S_k(\xi) - f(x) \in C_{\text{loc}}^{r,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^{n \times n}).$$

Alors

$$F_y \equiv F_z \equiv 0, \quad F_\xi(x, y, z, \xi) = \nabla S_k(\xi) \in C^\infty(\mathbb{R}^{n \times n}).$$

L'ellipticité (5.3) est donnée par l'hypothèse (5.15). Enfin, vu que $F_y \equiv 0$, l'hypothèse (5.4) n'est pas à vérifier. \square

CHAPITRE 6

EQUATIONS ELLIPTIQUES FORTEMENT NON-LINÉAIRES : LE PROBLÈME OBLIQUE

Nous allons traiter le problème non-linéaire avec une donnée au bord générale

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ G(x, u(x), \nabla u(x)) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suivant le même schéma que pour le problème de Dirichlet, nous allons linéariser les deux équations du problème, de sorte à obtenir une composante linéaire correspondant à un problème elliptique à dérivée oblique, puis appliquer la méthode du point fixe. Pour la résolution classique du problème, voir Ishii [37], Lieberman [46]-[47], Lieberman-Trudinger [48], Safonov [54] et Urbas [63]-[66].

6.1 Le résultat principal

Nous fixons des notations utilisées tout au long du chapitre.

Notation 6.1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $F : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$, $F = F(x, y, z, \xi)$. Alors pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$, nous notons

$$F[u] = F[u](x) := F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

De même, pour $G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, nous notons

$$G[u] = G[u](x) := G(x, u(x), \nabla u(x)), \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Hypothèse 6.2. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \beta \leq \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- un scalaire $M > 0$ et les ensembles P_M et \tilde{P}_M définis par

$$P_M := \{(y, z, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n} : |y|, |z|, |\xi| \leq M\},$$

$$\tilde{P}_M := \{(y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |y|, |z| \leq M\};$$

- une application $F = F(x, y, z, \xi) \in C^{r,\alpha}(\bar{\Omega} \times P_M) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times P_M)$ telle que

$$(y, z, \xi) \mapsto F(x, y, z, \xi) \in C^1(P_M), \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \text{si } r = 0,$$

$$F_y := \frac{\partial F}{\partial y} \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times P_M) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times P_M),$$

$$F_z := \left(\frac{\partial F}{\partial z_i} \right)_{i=1}^n \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^n),$$

$$F_\xi := \left(\frac{\partial F}{\partial \xi_{ij}} \right)_{i,j=1}^n \in C^{r,p}(\bar{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}) \cap C^{0,1}(\bar{\Omega} \times P_M; \mathbb{R}^{n \times n}),$$

pour un certain $p \in]\alpha, 1]$;

- une application $G = G(x, y, z) \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M)$ telle que

$$G_y := \frac{\partial G}{\partial y} \in C^{r+1,p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M),$$

$$G_z := \left(\frac{\partial G}{\partial z_i} \right)_{i=1}^n \in C^{r+1,p}(\bar{\Omega} \times \tilde{P}_M; \mathbb{R}^n);$$

- un scalaire $\lambda > 0$ tel que

$$\|F_y\|_{C^{r,p}}, \|F_z\|_{C^{r,p}}, \|F_\xi\|_{C^{r,p}}, \|G_y\|_{C^{r+1,p}}, \|G_z\|_{C^{r+1,p}} \leq \lambda$$

ou, si $r = 0$,

$$\|F_y\|_{C^{0,1}}, \|F_z\|_{C^{0,1}}, \|F_\xi\|_{C^{0,1}}, \|G_y\|_{C^{1,p}}, \|G_z\|_{C^{1,p}} \leq \lambda;$$

- une fonction $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\bar{\Omega})$ tel que

$$\varphi(\bar{\Omega}) \times \nabla \varphi(\bar{\Omega}) \times \nabla^2 \varphi(\bar{\Omega}) \subset P_{M/2}.$$

Théorème 6.3. Sous la notation 6.1 et les hypothèses 6.2, soient une constante d'ellipticité $\Lambda_1 > 0$ et une constante d'oblicité $\Lambda_2 > 0$ telles que

$$\langle F_\xi[\varphi](x)p; p \rangle \geq \Lambda_1 |p|^2, \quad \forall (x, p) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}^n, \quad (6.1)$$

$$F_y[\varphi](x) \leq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad (6.2)$$

$$G_y[\varphi](x) \langle G_z[\varphi](x); \nu \rangle \geq \Lambda_2, \quad \forall x \in \partial\Omega, \quad (6.3)$$

où ν est la normale extérieur unité sur $\partial\Omega$. Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, p, M, \lambda, \Lambda_i, \Omega) > 0$

tel que si F, G, φ satisfont l'inégalité

$$\|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}} + \|G[\varphi]\|_{C^{1,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème

$$\begin{cases} F[u] = 0 & \text{dans } \Omega \\ G[u] = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.4)$$

admet une solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K_1 (\|F[\varphi]\|_{C^{r,\alpha}} + \|G[\varphi]\|_{C^{r+1,\alpha}}), \quad (6.5)$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K_1 (\|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}} + \|G[\varphi]\|_{C^{1,\beta}}), \quad (6.6)$$

$$\langle F_\xi[u](x)p; p \rangle \geq K_2 |p|^2, \quad \forall (x, p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \quad (6.7)$$

où $K_i = K_i(r, \alpha, \beta, p, M, \lambda, \Lambda_i, \Omega) > 0$, $i = 1, 2$, sont des constantes.

Démonstration. Nous allons transformer le problème (5.5) afin de pouvoir lui appliquer le théorème 2.4. La preuve se déroule en trois étapes.

Etape 1 : linéarisation. Soit u une solution de (6.4), et posons $v := u - \varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Il est alors facile de voir que (6.4) est équivalent au problème linéarisé

$$\begin{cases} Lv = -F[\varphi] + R[v] & \text{dans } \Omega \\ Nv = -G[\varphi] + S[v] & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.8)$$

où, pour tout $v \in C^2(\overline{\Omega})$

$$Lv := \langle F_\xi[\varphi]; \nabla^2 v \rangle + \langle F_z[\varphi]; \nabla v \rangle + F_y[\varphi]v, \quad (6.9)$$

$$Nv := \langle G_z[\varphi]; \nabla v \rangle + G_y[\varphi]v, \quad (6.10)$$

$$R[v] := F[\varphi + v] - F[\varphi] - Lv, \quad (6.11)$$

$$S[v] := G[\varphi + v] - G[\varphi] - Nv. \quad (6.12)$$

Etape 2 : point fixe. Nous voulons appliquer le théorème 2.4 au problème (6.8). Fixons le cadre fonctionnel et vérifions les hypothèses (H_{XY}) , $(H_{\mathcal{L}})$ et $(H'_{\mathcal{Q}})$.

Etape 2.1. Nous posons les espaces de fonction

$$X_1 := C^{2,\beta}(\overline{\Omega}), \quad X_2 := C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

$$Y_1 := C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega}), \quad Y_2 := C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

et munissons les espaces Y_i des normes produits

$$\|\cdot\|_{Y_1} := \|\cdot\|_{C^{0,\beta}} + \|\cdot\|_{C^{1,\beta}}, \quad \|\cdot\|_{Y_2} := \|\cdot\|_{C^{r,\alpha}} + \|\cdot\|_{C^{r+1,\alpha}}.$$

L'hypothèse (H_{XY}) est satisfaite grâce à la proposition A.5.

Etape 2.2 Soit l'opérateur linéaire $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ défini par

$$\mathcal{L}u := (Lu; Nu), \quad \forall u \in X_2,$$

avec L et N donnés par (6.9) et (6.10). Il correspond à un problème elliptique à dérivée oblique. Les hypothèses (6.1)-(6.3) permettent d'invoquer le théorème B.5 : pour tout $f \in Y_2$, il existe un unique $u \in X_2$ tel que

$$\mathcal{L}u = f.$$

De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, M, \lambda, \Lambda_i) > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_{X_i} \leq K \|f\|_{Y_i}, \quad \forall f \in Y_2, \quad i = 1, 2.$$

Par conséquent, l'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$ est vérifiée.

Etape 2.3 Soit l'opérateur $\mathcal{Q} : X_2 \rightarrow Y_2$ défini par

$$\mathcal{Q}[u] := (R[u]; S[u]), \quad \forall u \in X_2,$$

avec R et S donnés par (6.11) et (6.12). Par les lemmes 4.9, 5.6 et 6.5, pour tout $v, w \in X_2$ satisfaisant

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}}, \|v\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq M/2,$$

nous avons les inégalités

$$\|\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w]\|_{Y_1} \leq c_1(\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}},$$

$$\|\mathcal{Q}[v]\|_{Y_2} \leq c_2(\|v\|_{C^{2,\beta}}) \|v\|_{C^{r+2,\alpha}},$$

où $c_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $c_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ sont des fonctions séparément croissantes indépendantes de u et v , et $c_1(0, 0) = c_2(0) = 0$, ce qui correspond à l'hypothèse (H'_Q) .

Etape 2.4. Toutes les hypothèses du théorème 2.4 ont été vérifiées. Ainsi, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour toute fonction $f \in Y_2$ satisfaisant

$$\|f\|_{Y_1} \leq \varepsilon,$$

il existe une solution $v \in X_2$ au problème

$$\mathcal{L}v = f + \mathcal{Q}[v], \tag{6.13}$$

et

$$\|v\|_{X_i} \leq 2K \|f\|_{Y_i}.$$

Par construction, le problème (6.13) est équivalent à (6.8). Donc, par ce qui précède, (6.8) admet une solution $v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ si

$$\|(F[\varphi], G[\varphi])\|_{Y_1} = \|F[\varphi]\|_{C^{0,\beta}} + \|G[\varphi]\|_{C^{1,\beta}} \leq \varepsilon.$$

En posant $u := v + \varphi$, nous avons ainsi une solution pour le problème initial (6.4), qui satisfait de plus les inégalités (6.5) et

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq 2K\varepsilon.$$

Etape 3. Il reste encore à montrer l'inégalité (6.7). Par le théorème A.9.ii, par l'hypothèse $F_\xi \in C^{0,1}(\overline{\Omega} \times P_M)$ et l'inégalité précédente,

$$\|F_\xi[u] - F_\xi[\varphi]\|_{C^0} \leq \|F_\xi\|_{C^1} \|u - \varphi\|_{C^2} \leq 2K\lambda\varepsilon,$$

et donc, pour tout $x \in \overline{\Omega}$ et $p \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle F_\xi[u](x)p; p \rangle &= \langle F_\xi[\varphi](x)p; p \rangle + \langle [F_\xi[u](x) - F_\xi[\varphi](x)]p; p \rangle \\ &\geq (\Lambda_1 - 2K\lambda\varepsilon)|p|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, quitte à choisir $\varepsilon < \frac{\Lambda_1}{2K\lambda}$, nous avons bien (6.7), ce qui termine la preuve. \square

6.2 Lemmes techniques

Lemme 6.4. Sous la notation 6.1 et les hypothèses 6.2, pour tout $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tel que

$$u(\overline{\Omega}) \times \nabla u(\overline{\Omega}) \subset \tilde{P}_M,$$

alors

$$G[u] \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence directe du théorème A.8. \square

Lemme 6.5. Sous la notation 6.1 et les hypothèses 6.2, soit l'application $S : \overline{\Omega} \times \tilde{P}_{M/2} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\begin{aligned} S(x, y, z) &:= G(x, \varphi(x) + y, \nabla \varphi(x) + z) - G(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x)) \\ &\quad - G_y(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x))y - \langle G_z(x, \varphi(x), \nabla \varphi(x)); z \rangle. \end{aligned}$$

Alors pour tout $u, v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, tels que

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}}, \|v\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq M/2,$$

nous avons l'inégalité

$$\|S[u] - S[v]\|_{C^{1,\beta}} \leq C_1(\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}}, \quad (6.14)$$

$$\|S[u]\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq C_2(\|u\|_{C^{2,\beta}}) \|u\|_{C^{r+2,\alpha}}, \quad (6.15)$$

où $C_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $C_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ sont des fonctions séparément croissantes indépendantes de u et v , et $C_1(0, 0) = C_2(0) = 0$.

Démonstration. Soient $v, w \in C^{r+2, \alpha}$ tels que

$$\|v\|_{C^{2, \beta}}, \|w\|_{C^{2, \beta}} \leq M/2.$$

Nous constatons que $S[u]$ est bien défini, car, par hypothèse,

$$(\varphi(x) + u(x), \nabla \varphi(x) + \nabla u(x)) \in \tilde{P}_{M/2} + \tilde{P}_{M/2} \subset \tilde{P}_M.$$

Nous supposons également, sans perte de généralité, que $\varphi \equiv 0$, quitte à remplacer $G(x, y, z)$ par $G(x, \varphi(x) + y, \nabla \varphi(x) + z)$. Par la suite, nous dénoterons par

$$\gamma_i = \gamma_i(r, \alpha, \beta, p, \lambda, M, \Omega) > 0$$

des constantes indépendantes de u, v .

Etape 1. Montrons (6.14). Pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in \tilde{P}_{M/2}$, nous écrivons

$$\begin{aligned} S(x, y_1, z_1) - S(x, y_2, z_2) &= G(x, y_1, z_1) - G(x, y_2, z_2) - G_y[0](x)(y_1 - y_2) - \langle G_z[0](x); z_1 - z_2 \rangle \\ &= \int_0^1 \left\{ [G_y(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2) - G_y[0](x)](y_1 - y_2) \right. \\ &\quad \left. + \langle G_z(x, ty_1 + (1-t)y_2, tz_1 + (1-t)z_2) - G_z[0](x); z_1 - z_2 \rangle \right\} dt, \end{aligned}$$

d'où

$$S[u] - S[v] = \int_0^1 \left\{ (G_y[tu + (1-t)v] - G_y[0])(u - v) + \langle G_z[tu + (1-t)v] - G_z[0]; \nabla u - \nabla v \rangle \right\} dt.$$

En passant à la norme $C^{1, \beta}$, nous appliquons successivement les théorème A.7 et A.9.iii :

$$\begin{aligned} \|S[u] - S[v]\|_{C^{1, \beta}} &\leq \gamma_1 \int_0^1 \left\{ \|G_y[tu + (1-t)v] - G_y[0]\|_{C^{1, \beta}} \|u - v\|_{C^{1, \beta}} \right. \\ &\quad \left. + \|G_z[tu + (1-t)v] - G_z[0]\|_{C^{1, \beta}} \|\nabla u - \nabla v\|_{C^{1, \beta}} \right\} dt \\ &\leq \gamma_2 \int_0^1 (\|G_y\|_{C^{1, p}} + \|G_z\|_{C^{1, p}}) \|tu + (1-t)v\|_{C^{2, \beta}}^{p-\beta} \|u - v\|_{C^{2, \beta}} dt \\ &\leq \gamma_3 (\|u\|_{C^{2, \beta}} + \|v\|_{C^{2, \beta}})^{p-\beta} \|u - v\|_{C^{2, \beta}} \end{aligned}$$

et on a ainsi obtenu (6.14), avec

$$C_1(a_1, a_2) := \gamma_3 (a_1 + a_2)^{p-\beta}.$$

Etape 3. Montrons ensuite l'inégalité (6.15). En écrivant

$$S(x, y, z) = \int_0^1 \left\{ [G_y(x, ty, tz) - G_y[0](x)](y_1 - y_2) + \langle G_z(x, ty, tz) - G_z[0](x); z_1 - z_2 \rangle \right\} dt,$$

alors

$$S[u] = \int_0^1 \{ (G_y[tu] - G_y[0])u + \langle G_z[tu] - G_z[0]; \nabla u \rangle \} dt.$$

En passant à la norme $C^{r+1,\alpha}$, nous appliquons successivement les théorèmes A.7 et A.9.iii,

$$\begin{aligned}
& \|S[v]\|_{C^{r+1,\alpha}} \\
& \leq \gamma_4 \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & \|G_y[tv] - G_y[0]\|_{C^0} \|u\|_{C^{r+1,\alpha}} + \|G_y[tv] - G_y[0]\|_{C^{r+1,\alpha}} \|u\|_{C^0} \\ & + \|G_z[tv] - G_z[0]\|_{C^0} \|\nabla u\|_{C^{r+1,\alpha}} + \|G_y[tv] - G_y[0]\|_{C^{r+1,\alpha}} \|\nabla u\|_{C^0} \end{aligned} \right\} dt \\
& \leq \gamma_5 \int_0^1 \left\{ \begin{aligned} & (\|G_y\|_{C^{0,1}} + \|G_z\|_{C^{0,1}}) \|tu\|_{C^2} \|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \\ & + (\|G_y\|_{C^{r+1,p}} + \|G_z\|_{C^{r+1,p}}) \left(\|tu\|_{C^2}^{p-\alpha} + \|tu\|_{C^{r+2,\alpha}} \right) \|u\|_{C^2} \end{aligned} \right\} dt \\
& \leq \gamma_6 \|u\|_{C^{2,\beta}}^{p-\alpha} \|u\|_{C^{r+2,\alpha}}
\end{aligned}$$

ce qui donne (6.14), avec

$$C_2(a) := \gamma_6 a^{p-\alpha}.$$

□

CHAPITRE 7

PROBLÈMES DE TRANSPORT

Dans ce chapitre, nous allons étudier quelques problèmes différentiels de type Monge-Ampère issus de la théorie du transport optimal. Il s'agit d'une équation d'ordre deux ayant une condition globale sur son domaine. Plus précisément, nous allons étudier le problème

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\Omega) = \Omega, \end{cases} \quad (7.1)$$

sous les conditions

$$\int_{\Omega} (f - 1) = 0, \quad f > 0,$$

et plus généralement

$$\begin{cases} g(\nabla u) \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\Omega) = \Omega^*, \end{cases} \quad (7.2)$$

sous les conditions

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} g, \quad f, g > 0.$$

Les problèmes (7.1) et (7.2) ont d'abord été étudiés par Pogorelov [53], qui parle de « second problème aux conditions de bord » (*second boundary value problem*) - le problème de Dirichlet et le problème de Neumann étant respectivement le « premier » et le « troisième » problème. Ces dernières décennies, ce problème a été intensément étudié pour ses applications en théorie du transport optimal (voir Brenier [1], Caffarelli [3], [4], Evans-Gangbo [30], Gangbo [32], Trudinger-Wang [62]) et en géométrie (voir Wolfson [74]).

L'existence de solutions régulières globales furent montrés pour la dimension deux par Delanoë [28], puis par Caffarelli [4] et Urbas [65], pour des domaines uniformément convexes. Voir également Urbas [63]-[71] et Trudinger [59] pour l'étude de problèmes plus généraux.

7.1 Lemmes techniques

Nous montrons ici quelques lemmes techniques qui seront utilisés dans les preuves des résultats d'existence, dans les sections suivantes. Nous commençons par une définition qui nous permettra de mieux manipuler la condition globale

$$\nabla u(\Omega) = \Omega.$$

Définition 7.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ non-vide, ouvert, borné, connexe et de classe C^1 . Une fonction définissante pour Ω est une application $\rho \in C^r(\mathbb{R}^n)$, $r \geq 1$ telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 1\} \quad \text{et} \quad \nabla \rho(x) \neq 0, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

En particulier, $\nabla \rho$ est un vecteur normal extérieur à $\partial\Omega$.

Le résultat suivant montre que la notion de fonction définissante est équivalente à la régularité du domaine considéré.

Théorème 7.2. Soient $r \geq 1$ et $0 \leq \alpha \leq 1$. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est de classe $C^{r,\alpha}$ si et seulement si Ω admet une fonction définissante $\rho \in C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. De plus, si $r \geq 2$, alors ρ peut être choisi de sorte que

$$|\nabla \rho(x)| = 1, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Démonstration. Voir Krantz-Parks [43], théorème 1.2.6. □

A partir de maintenant, vu que les domaines que nous considérerons seront au moins de classe C^2 , nous associerons systématiquement à tout ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ une fonction $\rho \in C^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq \rho(x) < 1\}, \quad \partial\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) = 1\}, \quad \bar{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) \leq 1\},$$

et

$$|\nabla \rho(x)| = 1, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Le lemme suivant est une résolution par point fixe d'un problème de Dirichlet ayant une condition globale sur son domaine.

Lemme 7.3. Soient $0 < \alpha < \gamma \leq 1$ et $r \geq 1$ entier. Soient des ensembles $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, bornés, de classe $C^{r+1,\gamma}$, connexes et dont le complémentaire est connexe, respectivement définis par les fonctions $\rho, \rho^* \in C^{r+1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \gamma, \Omega, \Omega^*) > 0$ telle que pour tout ρ^* satisfaisant l'inégalité

$$\|\rho - \rho^*\|_{C^{r+1,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon,$$

il existe une fonction $u \in C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega})$ telle que

$$\nabla u \in \text{Diff}(\bar{\Omega}; \bar{\Omega}^*) \quad \text{et} \quad u = \varphi_0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{7.3}$$

avec $\varphi_0(x) := \frac{1}{2}|x|^2$. De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \gamma, \Omega, \Omega^*) > 0$ telle que

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+1,\alpha}(\bar{\Omega})} \leq K \|\rho^* - \rho\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

Démonstration. En deux étapes.

Etape 1. Linéarisation. Soit u une solution de (7.3). En utilisant le lemme 7.17 et le fait que ∇u est un difféomorphisme, nous avons les équivalences

$$\begin{aligned}\nabla u(\Omega) = \Omega^* &\Leftrightarrow \partial \nabla u(\Omega) = \nabla u(\partial \Omega) \subset \partial \Omega^* \\ &\Leftrightarrow \rho^*(\nabla u(x)) = 1 = \rho(x), \quad \forall x \in \partial \Omega.\end{aligned}$$

En posant $v := u - \varphi_0 \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$, alors pour tout $x \in \partial \Omega$,

$$\rho(x) = \rho^*(\nabla v(x) + x) = \rho^*(x) + \langle \nabla \rho^*(x); \nabla v(x) \rangle + Q(x, \nabla v(x)),$$

où

$$Q(x, z) := \rho^*(x + z) - \rho^*(x) - \langle \nabla \rho^*(x); z \rangle, \quad \forall (x, z) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n.$$

Par le théorème 7.2, nous savons que $\nabla \rho$ est un vecteur normal unité à $\partial \Omega$, par conséquent, en ajoutant $\frac{\partial v}{\partial \nu}$ des deux côtés de l'égalité, nous obtenons le problème équivalent

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = \rho - \rho^* + \langle \nabla \rho - \nabla \rho^*; \nabla v \rangle + Q[v] \quad \text{et} \quad v \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \partial \Omega \quad (7.4)$$

Etape 2 : point fixe. Nous voulons appliquer le corollaire 2.7 sur (7.4). Soient les espaces de fonctions

$$X := \{v \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}) : v|_{\partial \Omega} \equiv 0\} \quad \text{et} \quad Y := C^{r,\alpha}(\partial \Omega),$$

munis de leur norme usuelle. Ensuite, soient les opérateurs $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{Q} : X \rightarrow Y$ définis par

$$\mathcal{L}v := \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \mathcal{M}v := \langle \nabla \rho - \nabla \rho^*; \nabla v \rangle, \quad \mathcal{Q}[v] := Q(x, \nabla v).$$

Vérifions les hypothèses (h_{XY}) , $(h_{\mathcal{L}})$ et $(h_{\mathcal{MQ}})$.

1. X est un espace de Banach et Y est un espace normé, ce qui correspond à l'hypothèse (h_{XY}) .
2. Par le théorème B.13, \mathcal{L} est inversible à droite et il existe une constante $K_1 = K_1(r, \alpha, \Omega)$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_X \leq K_1 \|f\|_Y, \quad \forall f \in Y.$$

3. Il est évident que

$$\|\mathcal{M}v\|_Y \leq K_2 \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+1,\alpha}(\partial \Omega)} \|v\|_X,$$

avec $K_2 = K_2(r, \alpha, \Omega)$. Montrons l'estimation

$$\|\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w]\|_Y \leq c(\|v\|_X, \|w\|_X) \|v - w\|_X$$

pour tout $\|v\|_X, \|w\|_X \leq 1$. En écrivant

$$\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w] = \int_0^1 \langle \nabla \rho^*(\text{id} + t\nabla v + (1-t)\nabla w) - \nabla \rho^*; \nabla v - \nabla w \rangle,$$

nous obtenons, en appliquant successivement les théorèmes A.7 et A.9.iii,

$$\begin{aligned}
& \|\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w]\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)} \\
& \leq \int_0^1 \left[\|\nabla \rho^* (\text{id} + t\nabla v + (1-t)\nabla w) - \nabla \rho^*\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)} \|\nabla v - \nabla w\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)} \right] dt \\
& \leq \|\nabla \rho^*\|_{C^{r,\gamma}} \|\nabla v + \nabla w\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)}^{\gamma-\alpha} \|v - w\|_{C^{r+1,\alpha}(\Omega)} \\
& \leq c(\|v\|_X, \|w\|_X) \|v - w\|_X
\end{aligned}$$

avec

$$c(a, b) := \|\rho^*\|_{C^{r+1,\gamma}} (a + b)^{\gamma-\alpha}, \quad \forall a, b \geq 0,$$

et la norme de ρ^* est prise sur un ensemble compact suffisamment grand pour contenir

$$(\text{id} + t\nabla v + (1-t)\nabla w)(\partial\Omega), \quad \forall 0 \leq t \leq 1.$$

Par le corollaire 2.7, le problème (7.4) admet une solution $v \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour tout $\rho, \rho^* \in C^{r+1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant

$$\begin{aligned}
\|\rho - \rho^*\|_Y & \leq \frac{1}{2K_1}, \quad K_2 \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+1,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \frac{1}{4K_1}, \\
c(2\|\rho - \rho^*\|_Y, 2\|\rho - \rho^*\|_Y) & \leq \frac{1}{4K_1},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$2K_1 \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+1,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \min \left\{ 1, \frac{1}{2K_2}, \frac{1}{2\|\rho^*\|_{C^{r+1,\gamma}(\partial\Omega)}^{1/(\gamma-\alpha)}} \right\}. \quad (7.5)$$

De plus, cette solution satisfait l'estimation

$$\|v\|_{C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq 2K_1 \|\rho - \rho^*\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

En posant $u := v + \varphi_0$, nous avons le lemme. \square

Remarque 7.4.

- (i) Dans la preuve, nous avons utilisé le corollaire 2.7 (qui ne fait intervenir qu'une paire d'espaces X, Y) plutôt que le théorème 2.6 (faisant intervenir deux paires d'espaces X_i, Y_i), car le terme linéaire $\mathcal{M}u$ doit être rendu petit dans les *deux* normes $\|\cdot\|_{Y_i}$, ce qui annule l'avantage que procure l'utilisation de deux paires d'espaces, comme nous l'avons fait dans les chapitres précédents.
- (ii) La condition de petitesse (7.5) n'est pas forcément vérifiée par un ρ^* puisque cette fonction se trouve des deux côtés de l'inégalité.

Le lemme suivant donne des estimations en norme hölderienne d'opérateurs non-linéaire du même type que ceux des chapitres précédents.

Lemme 7.5. Soient $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, bornés et lipschitziens. Soit $r \geq 0$, $0 < \beta \leq \alpha < \gamma \leq 1$. Soient des fonctions $g \in C^{r+1,\gamma}(\overline{\Omega^*})$, $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$, $u, v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tels que

$$\|u\|_{C^{2,\beta}}, \|v\|_{C^{2,\beta}} \leq 1.$$

$$(\nabla\varphi + t\nabla u)(\overline{\Omega}), (\nabla\varphi + t\nabla v)(\overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega^*}, \quad \forall t \in [0, 1],$$

Posons

$$\begin{aligned} Q[u] &:= \langle \nabla^2 u; \text{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi \rangle [g(\nabla\varphi) - g(\nabla\varphi + \nabla u)] \\ &\quad - \det(\nabla^2 \varphi) [g(\nabla\varphi + \nabla u) - g(\nabla\varphi) - \langle \nabla g(\nabla\varphi); \nabla u \rangle] \\ &\quad - g(\nabla\varphi + \nabla u) [\det(\nabla^2 \varphi + \nabla^2 u) - \det(\nabla^2 \varphi) - \langle \nabla^2 u; \text{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi \rangle]. \end{aligned}$$

Alors les inégalités suivantes sont vraies

$$\|Q[u] - Q[v]\|_{C^{0,\beta}} \leq c_1(\|u\|_{C^{2,\beta}}, \|v\|_{C^{2,\beta}}) \|u - v\|_{C^{2,\beta}}$$

$$\|Q[u]\|_{C^{r,\alpha}} \leq c_2(\|u\|_{C^{2,\beta}}) \|u\|_{C^{r+2,\alpha}},$$

où $c_1 \in C^0(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$, $c_2 \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}_+)$ sont des fonctions séparément croissantes telles que $c_1(0, 0) = c_2(0) = 0$, dépendantes de $\|g\|_{C^{r+2,\alpha}}$, $\|\varphi\|_{C^{r+2,\alpha}}$ et indépendantes de u et v .

Démonstration. La preuve est identique à celle des lemmes 4.9 et 6.5. Voir également le lemme 14.8 dans [9]. \square

7.2 Premier résultat

Nous montrons ici un premier résultat d'existence en employant la méthode du point fixe.

Théorème 7.6. Soient $0 < \beta \leq \alpha < \gamma \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, de classe $C^{r+2,\gamma}$, connexe et dont le complémentaire est connexe, et défini par la fonction $\rho \in C^{r+2,\gamma}(\mathbb{R}^n)$. Alors il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega) > 0$ tel que pour tout $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\int_{\Omega} (f - 1) = 0 \quad \text{et} \quad \|f - 1\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème (7.1) admet une solution strictement convexe $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}).$$

De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega) > 0$ telle que

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{2,\beta}} \leq K \|f - 1\|_{C^{0,\beta}},$$

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f - 1\|_{C^{r,\alpha}},$$

où $\varphi_0(x) := \frac{1}{2}|x|^2$.

Remarque 7.7.

- (i) Contrairement aux résultats d'existence classiques nous n'imposons aucune restriction sur la géométrie du domaine (voir par exemple Urbas [65] qui demande que Ω soit uniformément convexe). Le principal inconvénient de notre méthode est la petitesse des données

$$\|f - 1\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon.$$

- (ii) L'hypothèse sur la connexité du complémentaire de Ω sert à l'application de la proposition 7.17. Cette hypothèse n'est certainement pas nécessaire.

Démonstration. La preuve est similaire à celle des théorèmes d'existence pour les équations elliptiques : nous allons d'abord linéariser le déterminant, puis appliquer la méthode du point fixe.

Etape 1 : linéarisation. Soit u une solution de (7.12), et posons $v := u - \varphi_0$. Par (7.13), la première équation de (7.12) devient

$$f = \det(\nabla^2 v + I_n) = 1 + \operatorname{div}(\nabla v) - Q_1[v],$$

où

$$Q_1(x, y, z, \xi) := 1 + \operatorname{div}(z) - \det(\xi), \quad Q_1[v] = Q_1[v](x) := Q_1(x, v(x), \nabla v(x), \nabla^2 v(x)).$$

Ensuite, soit $\rho \in C^{r+2,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ une fonction définissante pour Ω . Puisque Ω est ouvert, borné, connexe, de complémentaire connexe et de classe au moins C^2 et ∇u est un difféomorphisme, la proposition 7.17 nous donne l'équivalence

$$\begin{aligned} \nabla u(\Omega) = \Omega &\Leftrightarrow \nabla u(\partial\Omega) \subset \partial\Omega \\ &\Leftrightarrow 1 = \rho(\nabla v + x) = \rho(x) + \langle \nabla \rho(x); \nabla v \rangle - Q_2[v] \quad \text{sur } \partial\Omega \\ &\Leftrightarrow 1 = 1 + \langle \nu; \nabla v \rangle - Q_2[v] \quad \text{sur } \partial\Omega \end{aligned}$$

où nous avons utilisé, par le théorème 7.2, $\rho(x) = 1$ et $\nabla \rho = \nu$ sur $\partial\Omega$, et noté

$$Q_2(x, y, z) := \rho(x) + \langle \nabla \rho(x); z \rangle - \rho(x + z),$$

$$Q_2[v] = Q_2[v](x) := Q_2(x, v(x), \nabla v(x)).$$

Ainsi, nous obtenons le problème équivalent

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla v) = f - 1 + Q_1[v] & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = Q_2[v] & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.6)$$

Etape 2 : problème bien posé. Pour que le problème (7.6) soit bien posé, il est nécessaire que

$$\int_{\Omega} (f - 1 + Q_1[v]) = \int_{\partial\Omega} Q_2[v]$$

pour toute solution admissible $v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Si

$$\int_{\Omega} (f - 1) = 0,$$

il suffit d'avoir

$$\int_{\Omega} Q_1[v] = \int_{\partial\Omega} Q_2[v]. \quad (7.7)$$

Cette égalité n'étant généralement pas vraie pour tout $v \in C^2(\overline{\Omega})$, nous allons « forcer » la condition de compatibilité en considérant le problème auxiliaire

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla v) = f - 1 + Q_1[v] & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = Q_2[v] + T[v] & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.8)$$

où $T : C^2(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$T[v] := \frac{1}{|\partial\Omega|} \left[\int_{\Omega} Q_1(v) - \int_{\partial\Omega} Q_2(v) \right] \quad \text{avec} \quad |\partial\Omega| := \int_{\partial\Omega} 1$$

Ainsi, pour tout $v \in C^2(\overline{\Omega})$, on a trivialement

$$\int_{\Omega} Q_1(v) = \int_{\partial\Omega} (Q_2(v) + T(v)),$$

et donc le problème (7.8) est bien posé.

Etape 3 : point fixe. Nous voulons appliquer le théorème 2.4 au problème (7.8). Soient les espaces de solutions

$$X_1 := \left\{ v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}, \quad X_2 := \left\{ v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}$$

et les espaces de données

$$Y_1 := \left\{ (f, g) \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g \right\},$$

$$Y_2 := \left\{ (f, g) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g \right\}$$

munis des normes

$$\|(f, g)\|_{Y_1} := \max\{\|f\|_{C^{0,\beta}}, \|g\|_{C^{1,\beta}}\}, \quad \|(f, g)\|_{Y_2} := \max\{\|f\|_{C^{r,\alpha}}, \|g\|_{C^{r+1,\alpha}}\}.$$

Ensuite, pour $v \in X_2$, posons les opérateurs

$$\mathcal{L}v := \left(\operatorname{div}(\nabla v), \frac{\partial v}{\partial \nu} \right),$$

et

$$\mathcal{Q}[v] := (Q_1[v]; Q_2[v] + T[v]). \quad (7.9)$$

Le problème (7.8) se reformule donc

$$\mathcal{L}v = (f - 1, 0) + \mathcal{Q}[v]. \quad (7.10)$$

Vérifions les hypothèses (H_{XY}) , $(H_{\mathcal{L}})$ et $(H'_{\mathcal{Q}})$ du théorème 2.4.

1. Grace à la proposition A.5, les espaces X_i, Y_i satisfont l'hypothèse (H_{XY}) .
2. Par le théorème de la divergence, l'opérateur $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ est bien défini. Le corollaire B.10 affirme que pour tout $(f, g) \in Y_2$, il existe un unique $v \in X_2$ satisfaisant $Lv = (f, g)$; de plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, \Omega) > 0$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_{X_i} \leq K \|f\|_{Y_i}, \quad \forall f \in Y_2, \quad i = 1, 2. \quad (7.11)$$

Par conséquent, l'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$ est satisfaite.

3. L'opérateur non-linéaire $\mathcal{Q} : X_2 \rightarrow Y_2$ donné par (7.9) est bien défini, par construction (étape 1.2). Nous voulons montrer les estimations

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w]\|_{Y_1} &\leq c_1(\|v\|_{X_1}, \|w\|_{X_1}) \|v - w\|_{X_1}, \\ \|\mathcal{Q}[v]\|_{Y_2} &\leq c_2(\|v\|_{X_1}) \|v\|_{X_2} \end{aligned}$$

pour tout $\|v\|_{X_1}, \|w\|_{X_1} \leq 1$, où $c_i > 0$ sont des fonctions continues, séparément croissantes et dépendant de $r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega, \lambda$. Par définition de \mathcal{Q} , nous voyons ces estimations pour les trois opérateurs Q_1, Q_2 et T .

- L'estimation de $Q_1[v]$ nous provient directement des propriétés du déterminant (voir la démonstration du lemme 3.3) :

$$\begin{aligned} \|Q_1[v] - Q_1[w]\|_{C^{0,\beta}} &\leq c_1(\|u\|_{C^{2,\beta}}, \|v\|_{C^{2,\beta}}) \|u - v\|_{C^{2,\beta}}, \\ \|Q_1[v]\|_{C^{r,\alpha}} &\leq c_2(\|v\|_{C^{2,\beta}}) \|v\|_{C^{r+2,\alpha}}. \end{aligned}$$

- L'estimation de $Q_2[v]$ se fait exactement de la même manière que dans le lemme 4.9, en utilisant le fait que $\rho \in C^{r+2,\gamma}$, ce qui donne

$$\begin{aligned} \|Q_2[v] - Q_2[w]\|_{C^{1,\beta}} &\leq c_1(\|u\|_{C^{2,\beta}}, \|v\|_{C^{2,\beta}}) \|u - v\|_{C^{2,\beta}}, \\ \|Q_2[v]\|_{C^{r+1,\alpha}} &\leq c_2(\|v\|_{C^{2,\beta}}) \|v\|_{C^{r+2,\alpha}}. \end{aligned}$$

- Enfin, le terme $T[v]$ est un scalaire (c'est-à-dire une fonction constante), donc, en utilisant ce qui précède,

$$\|T[v]\|_{C^{r+1,\alpha}} = |T[v]| \leq \frac{|\Omega|}{|\partial\Omega|} \|Q_1[v]\|_{C^0} + \|Q_2[v]\|_{C^0} \leq c_2(\|v\|_{C^{2,\beta}}) \|v\|_{C^{r+2,\alpha}}.$$

De même,

$$|T(v) - T(w)| \leq c_1(\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}},$$

Toutes les hypothèses du théorème 2.4 sont vérifiées; il existe donc une constante $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \gamma, \Omega, \lambda) > 0$ telle que pour tout $(f - 1, 0) \in Y_2$ satisfaisant l'inégalité

$$\|(f - 1, 0)\|_{Y_1} = \|f - 1\|_{C^{0,\beta}} \leq \varepsilon,$$

le problème (7.10) admet une unique solution $v \in X_2$ satisfaisant

$$\|v\|_{C^{2,\beta}} \leq K \|f - 1\|_{C^{0,\beta}},$$

$$\|v\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \|f - 1\|_{C^{r,\alpha}},$$

où $K = K(r, \alpha, \beta, \Omega, \lambda) > 0$.

Etape 3 : difféomorphisme. Par ce qui précède, il existe une solution $v \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ au problème (7.8), si

$$\|f - 1\|_{C^{0, \beta}} \leq \varepsilon.$$

Alors $u := \varphi_0 + v$ est une solution de

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \rho(\nabla u) = 1 + T[u - \varphi_0] & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

De plus, par l'étape 2, nous avons les estimations

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{2, \beta}} \leq K \|f - 1\|_{C^{0, \beta}} \leq K\varepsilon,$$

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K \|f - 1\|_{C^{r, \alpha}}.$$

En particulier, puisque $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, le lemme 7.19 implique que pour ε suffisamment petit,

$$\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}; \overline{\nabla u(\Omega)})$$

Etape 4. Enfin, il nous reste à montrer que

$$\nabla u(\Omega) = \Omega.$$

Posons

$$\Omega_T := \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x) < 1 + T[u - \varphi]\},$$

qui est un ensemble ouvert, borné et de classe $C^{r+2, \alpha}$. Alors, par définition de ρ ,

$$\rho(\nabla u) = 1 + T[u - \varphi_0] \Leftrightarrow (\nabla u)(\partial\Omega) \subset \partial\Omega_T$$

Or, par définition de T ,

$$\|u - \varphi\|_{C^{2, \beta}} \leq K\varepsilon \Rightarrow |T[u - \varphi_0]| \leq \tilde{K}\varepsilon$$

avec $\tilde{K} > 0$. En choisissant ε suffisamment petit, nous pouvons nous assurer que Ω_T et $(\overline{\Omega}_T)^c$ ont la même connexité que Ω et $(\overline{\Omega})^c$ (autrement, il existerait un point $x_0 \in \Omega$ tel que $\rho(x_0) = 0$, ce qui contredit le théorème 7.2). Par conséquent, puisque ∇u est un difféomorphisme, par le lemme 7.17,

$$\nabla u(\partial\Omega) = \partial\nabla u(\Omega) \subset \partial\Omega_T \Rightarrow \nabla u(\Omega) = \Omega_T.$$

Pour finir, montrons $\Omega = \Omega_T$. Puisque ρ est continue sur \mathbb{R}^n , alors on a par définition

$$\begin{cases} \Omega \subset \Omega_T & \text{si } T > 0 \\ \Omega \supset \Omega_T & \text{si } T < 0, \end{cases}$$

Puisque $\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega}_T)$, $\det(\nabla^2 u) = f$ et $\int_{\Omega} f = \text{mes}(\Omega)$, alors la formule classique du changement de variables nous donne

$$\begin{aligned} \text{mes}(\Omega) &= \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \det(\nabla^2 u) = \int_{\nabla u(\Omega)} dy \\ &= \int_{\Omega_T} dy = \text{mes}(\Omega_T). \end{aligned}$$

En appliquant la proposition 7.18, nous avons $\Omega = \Omega_T = \nabla u(\Omega)$. □

Remarque 7.8.

(i) Le résultat peut se généraliser pour le problème

$$\begin{cases} \det(\nabla^2 u + \nabla(hu)) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u + hu \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}), \end{cases} \quad (7.12)$$

où $h \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ admet des fonctions $H \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi_0 \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telles que

$$h = \nabla H \quad \text{et} \quad \nabla \varphi_0 + h\varphi_0 = \text{id} \quad \text{sur } \overline{\Omega}. \quad (7.13)$$

Ce problème est cependant moins intéressant, car la condition (7.13) est très rigide, et il est notamment nécessaire que

$$x_i h^j(x) = x_j h^i(x), \quad \forall 1 \leq i < j \leq n, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{\Omega}.$$

(ii) Par une démarche de linéarisation similaire à celle du chapitre 5, il est possible de résoudre par la méthode du point fixe des problèmes de la forme

$$\begin{cases} F(x, u(x), \nabla u(x), \nabla^2 u(x)) & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}). \end{cases}$$

7.3 Second résultat

Nous travaillons maintenant un problème plus général

$$\begin{cases} g(\nabla u) \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\Omega) = \Omega^*, \end{cases} \quad (7.14)$$

où Ω, Ω^* sont ouverts, bornés et connexes, $f, g > 0$ et

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} g.$$

Nous voulons résoudre ce problème en appliquant la méthode du point fixe. La démarche est essentiellement la même que pour le problème précédent, cependant, la présence du facteur g va demander une version plus forte du théorème 2.4.

Hypothèse 7.9. Soient

- $0 < \beta \leq \alpha < \gamma \leq 1$, $r \in \mathbb{N}$,
- $\Omega, \Omega^* \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, bornés, connexes, de classe $C^{r+2,\gamma}$ et dont le complémentaire est connexe, définis par les fonctions $\rho, \rho^* \in C^{r+2,\gamma}(\mathbb{R}^n)$
- $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $g \in C^{r+1,\gamma}(\mathbb{R}^n)$ tels que $f, g > 0$,

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega^*} g, \quad (7.15)$$

- des constantes $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ telles que

$$\|\rho\|_{C^{r+2,\gamma}(\partial\Omega)}, \|\rho^*\|_{C^{r+2,\gamma}(\partial\Omega^*)}, \|g\|_{C^{r+1,\gamma}(\overline{\Omega^*})} \leq \lambda_1, \quad |g| \geq \lambda_2 \quad \text{sur } \partial\Omega^*.$$

Théorème 7.10. Sous les hypothèses 7.9, il existe une constante $\varepsilon = \varepsilon(r, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ telle que pour tout f, g, ρ, ρ^* satisfaisant

$$\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon, \quad (7.16)$$

le problème (7.14) admet une solution strictement convexe $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega}^*).$$

De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ telle que

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{2,\beta}} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right)$$

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right),$$

avec $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}|x|^2$.

Remarque 7.11.

- (i) Comme pour le théorème 7.6, la comparaison de ce résultat avec celui d'Urbas [65] montre que nos hypothèses sur f, g, Ω et Ω^* sont plus générales, en particulier Ω et Ω^* n'ont pas besoin d'être uniformément convexes. En contrepartie, nous avons besoin de données petites (inégalité 7.16).
- (ii) Il n'est pas nécessaire que $\nabla^{r+1}g$ et $\nabla^{r+2}\rho$ aient la même Hölder-régularité (c'est-à-dire soient de classe $C^{0,\gamma}$), par contre il faut que leur coefficient de Hölder soit strictement supérieur à α .

Démonstration. La démonstration se déroule en 4 étapes.

Etape 1 : linéarisation. Par le lemme 7.3, il existe des constantes $C = C(r, \alpha, \lambda_1)$ et $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(r, \alpha, \lambda_1) > 0$ tels que si ρ, ρ^* satisfont

$$\|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon_1,$$

alors il existe une fonction $\varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $\nabla\varphi \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \overline{\Omega}^*)$,

$$\rho^*(\nabla\varphi) = \rho \quad \text{et} \quad \varphi = \varphi_0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

et l'inégalité

$$\|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+1,\alpha}(\partial\Omega)}. \quad (7.17)$$

Supposons que u soit une solution de (7.14) et posons $v := u - \varphi$.

Etape 1.1. La première équation de (7.14) devient

$$\begin{aligned} f &= g(\nabla v + \nabla\varphi) \det(\nabla^2 v + \nabla^2\varphi) \\ &= [g(\nabla\varphi) + \langle \nabla g(\nabla\varphi); \nabla v \rangle + G(x, \nabla v)] \\ &\quad \cdot [\det(\nabla^2\varphi) + \langle \text{adj}_{n-1} \nabla^2\varphi; \nabla^2 v \rangle + R(x, \nabla^2 v)] \\ &= g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi) + \text{div}(g(\nabla\varphi) \nabla v) - Mv - Q_1[v], \end{aligned}$$

où G et R sont des termes non-linéaires issus de la linéarisation de g et \det respectivement, et, pour tout $(x, z, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$M(x, z, \xi) := \operatorname{div}(g(\nabla\varphi)z) - g(\nabla\varphi) \langle \operatorname{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi; \xi \rangle - \langle \nabla g(\nabla\varphi); z \rangle \det(\nabla^2 \varphi), \quad (7.18)$$

$$\begin{aligned} Q_1(x, z, \xi) &:= \langle \operatorname{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi; \xi \rangle [g(\nabla\varphi) - g(\nabla\varphi + z)] \\ &\quad - \det(\nabla^2 \varphi) [g(\nabla\varphi + z) - g(\nabla\varphi) - \langle \nabla g(\nabla\varphi); z \rangle] \\ &\quad - g(\nabla\varphi + z) [\det(\nabla^2 \varphi + \xi) - \det(\nabla^2 \varphi) - \langle \operatorname{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi; \xi \rangle], \end{aligned}$$

$$Mv(x) := M(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)), \quad Q_1[v] = Q_1[v](x) := Q_1(x, \nabla v(x), \nabla^2 v(x)).$$

Nous obtenons ainsi l'équation linéarisée

$$\operatorname{div}(g(\nabla\varphi)\nabla v) = f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi) + Mv + Q_1[v] \quad \text{dans } \Omega. \quad (7.19)$$

Etape 1.2. En supposant que ∇u soit un difféomorphisme, par les hypothèses sur Ω et Ω^* , nous pouvons appliquer la proposition 7.17 qui nous donne l'équivalence

$$\nabla u(\Omega) = \Omega^* \Leftrightarrow \nabla u(\partial\Omega) = \partial\nabla u(\Omega) \subset \partial\Omega^* \Leftrightarrow \rho^*(\nabla u(x)) = 1, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

On a donc

$$1 = \rho^*(\nabla v + \nabla\varphi) = \rho^*(\nabla\varphi) + \langle \nabla\rho^*(\nabla\varphi); \nabla v \rangle - Q_2[v]. \quad (7.20)$$

où, pour tout $(x, z) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^n$,

$$Q_2(x, z) := -\rho^*(\nabla\varphi + z) + \rho^*(\nabla\varphi) + \langle \nabla\rho^*(\nabla\varphi); z \rangle,$$

$$Q_2[v] = Q_2[v](x) := Q_2(x, \nabla v(x)).$$

Puisque $\nabla\varphi \in \operatorname{Diff}(\overline{\Omega}; \overline{\Omega}^*)$ et Ω^* est de classe au moins C^2 , alors

$$\nabla\varphi(\partial\Omega) = \partial\Omega^*$$

d'où, par le théorème 7.2,

$$\rho^*(\nabla\varphi) = 1, \quad \nabla\rho^*(\nabla\varphi) = \nu \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où ν est la normale extérieure à Ω . Ainsi, 7.20 devient simplement

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} = Q_2[v]. \quad (7.21)$$

En regroupant les équations (7.19) et (7.21), nous reformulons (7.14) sous la forme d'un problème de Neumann.

$$\begin{cases} \operatorname{div}(g(\nabla\varphi)\nabla v) = f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi) + Mv + Q_1[v] & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = Q_2[v] & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.22)$$

Etape 2 : problème bien posé. Pour que le problème (7.22) soit bien posé, il faut qu'il vérifie la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(g(\nabla\varphi)\nabla v) = \int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) \frac{\partial v}{\partial \nu}.$$

Par l'hypothèse (7.15), nous avons

$$\int_{\Omega} [f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi)] = \int_{\Omega} f - \int_{\Omega^*} g = 0.$$

Cependant, nous n'avons généralement pas

$$\int_{\Omega} Mv + Q_1[v] = \int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) Q_2[v].$$

Posons $T_M(v), T_Q(v) \in \mathbb{R}$ les quantités

$$T_M(v) := \left(\int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) \right)^{-1} \int_{\Omega} Mv,$$

$$T_Q(v) := \left(\int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) \right)^{-1} \left[\int_{\Omega} Q_1[v] - \int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) Q_2[v] \right]$$

qui sont bien définies, car $g > 0$. Alors le problème de Neumann suivant est bien posé :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(g(\nabla\varphi)\nabla v) = f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi) + Mv + Q_1[v] & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} = T_M(v) + Q_2[v] + T_Q(v) & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.23)$$

Etape 3 : point fixe. Nous voulons appliquer le théorème 2.6 sur le problème (7.23). Soient les espaces de fonctions

$$X_1 := \left\{ v \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} v = 0 \right\}, \quad X_2 := \left\{ v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} v = 0 \right\},$$

$$Y_1 := \left\{ (f_1, f_2) \in C^{0,\beta}(\overline{\Omega}) \times C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f_1 = \int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) f_2 \right\},$$

$$Y_2 := \left\{ (f_1, f_2) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f_1 = \int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) f_2 \right\},$$

munis de leur norme usuelle. Soit l'opérateur linéaire $\mathcal{L} : X_2 \rightarrow Y_2$ défini par

$$\mathcal{L}v := \left(\operatorname{div}(g(\nabla\varphi)\nabla v), \frac{\partial v}{\partial \nu} \right).$$

Soient les opérateurs $\mathcal{M}, \mathcal{Q} : X_2 \rightarrow Y_2$ définis par

$$\mathcal{M}v := (Mv, T_M(v)), \quad \mathcal{Q}[v] := (Q_1[v], Q_2[v] + T_Q(v)).$$

Par construction, le problème (7.23) est équivalent à résoudre dans X_2

$$\mathcal{L}v = (f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi); 0) + \mathcal{M}v + \mathcal{Q}[v]. \quad (7.24)$$

Vérifions les hypothèses (H_{XY}) , $(H_{\mathcal{L}})$ et $(H_{\mathcal{M}\mathcal{Q}})$

1. La proposition A.5 assure que l'hypothèse (H_{XY}) est satisfaite.

2. L'opérateur \mathcal{L} correspond à un problème de Neumann. Par le théorème B.9, \mathcal{L} est inversible à droite et il existe une constante $K_1 = K_1(r, \alpha, \lambda_1, \Omega)$ telle que

$$\|\mathcal{L}^{-1}(f_1, f_2)\|_{X_i} \leq K_1 \|(f_1, f_2)\|_{Y_i}, \quad \forall (f_1, f_2) \in Y_2, \quad i = 1, 2.$$

L'hypothèse $(H_{\mathcal{L}})$ est donc satisfaite.

3. Par définition de T_M et T_Q , les opérateurs \mathcal{M} , \mathcal{Q} et $\mathcal{M} + \mathcal{Q}$ sont bien définis. Nous voulons montrer l'hypothèse $(H_{\mathcal{M}\mathcal{Q}})$, c'est-à-dire

$$\|\mathcal{Q}[v] - \mathcal{Q}[w]\|_{Y_1} \leq c_1(\|v\|_{X_1}, \|w\|_{X_1}) \|v - w\|_{X_1}, \quad (7.25)$$

$$\|\mathcal{Q}[v]\|_{Y_2} \leq c_2(\|v\|_{X_1}) \|v\|_{X_2}. \quad (7.26)$$

$$\|\mathcal{M}v\|_{Y_i} \leq K_2 \|\varphi - \varphi_0\|_{X_i} \|v\|_{X_i}, \quad \forall v \in Y_2, \quad i = 1, 2, \quad (7.27)$$

avec $K_2 = K_2(r, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ et $c_i > 0$ des fonctions continues, séparément croissantes et dépendantes de $r, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2$. Nous noterons $\gamma_i = \gamma_i(r, \alpha, \beta, \lambda_1, \lambda_2) > 0$ des constantes indépendantes de $u, v \in X_2$.

- D'abord, par le lemme 7.5, pour tout $v, w \in X_2$ satisfaisant

$$\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}} \leq 1,$$

$$(\nabla\varphi + t\nabla v)(\bar{\Omega}), (\nabla\varphi + t\nabla w)(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}^*, \quad \forall t \in [0, 1],$$

nous avons

$$\|Q_1[v] - Q_1[w]\|_{C^{0,\beta}} \leq \gamma_1(\|v\|_{C^{2,\beta}} + \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}},$$

$$\|Q_1[v]\|_{C^{r,\alpha}} \leq \gamma_1 \|v\|_{C^{r+2,\alpha}} \|v\|_{C^{2,\beta}}.$$

- Les estimations

$$\|Q_2[v] - Q_2[w]\|_{C^{1,\beta}} \leq c_1(\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}},$$

$$\|Q_2[v]\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq c_2(\|v\|_{C^{r+2,\alpha}}) \|v\|_{C^{2,\beta}}.$$

sont obtenues de la même façon que le lemme 4.9, en écrivant, par exemple,

$$Q_2[v] = \int_0^1 \langle \nabla \rho^*(\nabla\varphi) - \nabla \rho^*(\nabla\varphi + tz); z \rangle dt$$

et en utilisant le fait que $\rho^* \in C^{r+2,\gamma}(\mathbb{R}^n)$.

- Enfin, puisque

$$T_Q(v) = \left(\int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) \right)^{-1} \left[\int_{\Omega} Q_1(v) - \int_{\partial\Omega} g Q_2(v) \right],$$

et, par hypothèse, $|g| \geq \lambda_2 > 0$, alors nous avons directement, par ce qui précède,

$$|T_Q(v) - T_Q(w)| \leq c_1(\|v\|_{C^{2,\beta}}, \|w\|_{C^{2,\beta}}) \|v - w\|_{C^{2,\beta}},$$

$$|T_Q(v)| \leq c_2(\|v\|_{C^{r+2,\alpha}}) \|v\|_{C^{2,\beta}},$$

ce qui montre les inégalités (7.25) et (7.26).

- Nous montrons (7.27) pour la norme Y_2 , l'autre étant identique. Nous réécrivons (7.18) comme

$$Mv = M_1v + M_2v + M_3v,$$

avec

$$\begin{aligned} M_1 &:= g(\nabla\varphi) \langle \nabla^2 v; I_n - \text{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi \rangle, \\ M_2 &:= \langle \nabla v; (\nabla^2 \varphi - I_n) \nabla (g(\nabla\varphi)) \rangle, \\ M_3 &:= \langle \nabla v; \nabla g \circ \nabla \varphi \rangle (1 - \det(\nabla^2 \varphi)). \end{aligned}$$

Puisque $\varphi_0(x) = |x|^2/2$, il suffit de voir que

$$\left. \begin{aligned} &\|\text{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi_0 - \text{adj}_{n-1} \nabla^2 \varphi\|_{C^{r,\alpha}} \\ &\|\nabla^2 \varphi_0 - \nabla^2 \varphi\|_{C^{r,\alpha}} \\ &\|\det(\nabla^2 \varphi_0) - \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}} \end{aligned} \right\} \leq \gamma_2 \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}},$$

d'où, par le théorème A.7 et le fait que $\|g\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq \Lambda$,

$$\|Mv\|_{C^{r,\alpha}} \leq \gamma_3 \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}} \|v\|_{C^{r+2,\alpha}}.$$

Ensuite, puisque

$$T_M(v) = \left(\int_{\partial\Omega} g(\nabla\varphi) \right)^{-1} \int_{\Omega} Mv$$

et $|g| \geq \lambda_2 > 0$, alors nous avons directement

$$\|T_M(v)\|_{C^{r+1,\alpha}} = |T_M(v)| \leq \gamma_4 \|M(v)\|_{C^0} \leq \gamma_5 \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}} \|v\|_{C^{r+2,\alpha}},$$

ce qui achève de montrer (7.27).

Etape 3.4. Toutes les hypothèses étant vérifiées, nous appliquons le théorème 2.6 sur (7.23) : il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que si les données satisfont

$$\|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon_2, \quad (7.28)$$

$$\|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon_2, \quad (7.29)$$

alors (7.24) admet une solution $v \in X_2$ telle que

$$\|v\|_{C^{2,\beta}} \leq k_1 \|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}},$$

$$\|v\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq k_1 \|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{r,\alpha}}.$$

Nous voulons définir une constante $\varepsilon > 0$ telle que pour tout f, g, ρ, ρ^* satisfaisant

$$\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon, \quad (7.30)$$

les inégalités (7.28) et (7.29) soient vérifiées. D'abord, par l'inégalité du triangle, nous avons

$$\begin{aligned} \|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} &\leq \|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \\ &\quad + \|g - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2 \varphi)\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \\ &\leq \|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \gamma_6 \|g\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega}^*)} \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \\ &\leq \gamma_7 \left(\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé (7.17) dans la dernière inégalité. Posons

$$\varepsilon := \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{C}, \frac{\varepsilon_2}{C}, \frac{\varepsilon_2}{2\gamma_7} \right\},$$

où $\varepsilon_1, C > 0$ ont été introduits dans l'étape 1. Ainsi, pour tout f, g, ρ, ρ^* satisfaisant

$$\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})}, \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon,$$

nous avons, d'une part, par ce qui précède,

$$\|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi)\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} \leq 2\gamma_7\varepsilon \leq \varepsilon_2.$$

D'autre part, par (7.17),

$$\|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq \varepsilon_1 \quad \Rightarrow \quad \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\varepsilon_1,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} &\leq \varepsilon \leq \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{C}, \frac{\varepsilon_2}{2C} \right\} \\ \Rightarrow \quad \|\varphi - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq C \min \left\{ \varepsilon_1, \frac{\varepsilon_1}{C}, \frac{\varepsilon_2}{2C} \right\} \leq \varepsilon_2. \end{aligned}$$

Ainsi, sous la condition (7.30), les inégalités (7.28) et (7.29) sont bien vérifiées, et donc le problème (7.23) admet une solution $v \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant les estimations

$$\begin{aligned} \|v\|_{C^{r+2,\alpha}} &\leq \gamma_8 \|f - g(\nabla\varphi) \det(\nabla^2\varphi)\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} \\ &\leq K \left(\|f - g\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right) \end{aligned}$$

et

$$\|v\|_{C^{2,\beta}} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right).$$

Etape 4. Pour conclure, on vérifie que la fonction $u := v + \varphi \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est solution de (7.14). Nous savons que u satisfait les équations

$$\begin{cases} g(\nabla u) \det(\nabla^2 u) = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u(\partial\Omega) \subset \partial\Omega_T^*, \end{cases} \quad (7.31)$$

où

$$\Omega_T^* = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho^*(x) \leq 1 + T(u)\}, \quad T(u) = T_M(u - \varphi) + T_Q(u - \varphi) \in \mathbb{R},$$

et les estimations

$$\|u - \varphi\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right),$$

$$\|u - \varphi\|_{C^{2,\beta}} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right) \leq 2K\varepsilon.$$

En particulier,

$$\|u - \varphi_0\|_{C^2} \leq \|u - \varphi\|_{C^2} + \|\varphi - \varphi_0\|_{C^2} \leq \varepsilon(1 + 2K).$$

Puisque $\varphi_0(x) = \frac{1}{2}|x|^2$, en choisissant ε suffisamment petit, le lemme 7.19 nous assure que

$$\nabla u \in \text{Diff}(\overline{\Omega}, \nabla u(\overline{\Omega})).$$

De plus, comme $T(\varphi) = 0$ et ρ^* est continue, on peut également s'assurer que $T(u)$ soit suffisamment petit pour que Ω_T^* et son complémentaire soient connexes. Par conséquent, la proposition 7.17 implique que

$$\nabla u(\partial\Omega) = \partial\nabla u(\Omega) \subset \partial\Omega_T^* \Rightarrow \nabla u(\Omega) = \Omega_T^*.$$

Ensuite, par l'hypothèse (7.15) et le fait que u soit solution de (7.31),

$$\int_{\Omega^*} g = \int_{\Omega} f = \int_{\Omega} g(\nabla u) \det(\nabla^2 u) = \int_{\nabla u(\Omega)} g.$$

par conséquent

$$\int_{\Omega^*} g = \int_{\Omega_T^*} g.$$

Puque $g > 0$ et

$$\Omega^* \subset \Omega_T^* \quad \text{ou} \quad \Omega^* \supset \Omega_T^*,$$

alors nous avons nécessairement $\text{mes}(\Omega^*) = \text{mes}(\Omega_T^*)$, et donc, par la proposition 7.18, $\Omega^* = \Omega_T^*$, d'où

$$\nabla u(\Omega) = \Omega^*.$$

Pour finir, nous pouvons substituer φ_0 à φ en utilisant l'inégalité triangulaire et le lemme 7.3, ce qui nous donne les estimations finales

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right),$$

$$\|u - \varphi_0\|_{C^{2,\beta}(\overline{\Omega})} \leq K \left(\|f - g\|_{C^{0,\beta}(\overline{\Omega})} + \|\rho - \rho^*\|_{C^{r+2,\alpha}(\partial\Omega)} \right).$$

□

7.4 Annexe : Régularité, connexité et convexité

Dans cette section, nous montrons quelques résultats de topologies utilisés significativement dans les preuves des principaux résultats du chapitre.

Définition 7.12 (Domaine régulier). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné. On pose

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| < 1, \quad \forall 1 \leq i \leq n\},$$

$$Q_+ := \{x \in Q : x_n > 0\}, \quad Q_- := \{x \in Q : x_n < 0\}, \quad Q_0 := \{x \in Q : x_n = 0\}.$$

Nous dirons que Ω est *régulier* s'il satisfait au moins une des propriétés suivantes.

- (i) Pour tout $r \geq 1$, on dit que Ω est *de classe C^r* si, pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ contenant x et une application bijective $H : \overline{U} \rightarrow \overline{Q}$ satisfaisant

$$H \in C^r(\overline{U}; \overline{Q}), \quad H^{-1} \in C^r(\overline{Q}; \overline{U}),$$

$$H(U \cap \Omega) = Q_+, \quad H(U \cap \Omega^c) = Q_-, \quad H(U \cap \partial\Omega) = Q_0.$$

- (ii) Si H et H^{-1} sont de classe $C^{r,\alpha}$, avec $0 < \alpha \leq 1$, alors Ω est dit *de classe $C^{r,\alpha}$* .
- (iii) Si H et H^{-1} sont de classe $C^{0,1}$, alors Ω est dit *lipschitzien*.

Remarque 7.13. Une conséquence élémentaire de cette définition est que le voisinage U peut être choisi arbitrairement petit.

Proposition 7.14. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et régulier. Alors

$$\Omega = \text{int}(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. L'inclusion $\Omega \subset \text{int}(\overline{\Omega})$ est triviale, car $\text{int}(\overline{\Omega})$ est par définition le plus grand ouvert contenu dans $\overline{\Omega}$. Supposons par l'absurde que cette inclusion soit stricte et soit

$$x \in \text{int}(\overline{\Omega}) \setminus \Omega = \text{int}(\overline{\Omega}) \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Par régularité de Ω , il existe un voisinage ouvert $U \ni x$ tel que

$$U \cap \overline{\Omega}^c \neq \emptyset. \quad (7.32)$$

Par la remarque 7.13, puisque $\text{int}(\overline{\Omega})$ est ouvert, U peut être choisi suffisamment petit pour que

$$U \subset \text{int}(\overline{\Omega}),$$

ce qui contredit (7.32). □

Remarque 7.15. Le résultat est faux si Ω n'est pas régulier. Par exemple, soit $B \subset \mathbb{R}^n$ la boule unité et

$$\Omega := B \setminus \{0\}.$$

Alors Ω n'est pas régulier en $0 \in \partial\Omega$, au sens de la définition 7.12 et

$$\overline{\Omega} = \overline{B}, \quad \text{int}(\overline{\Omega}) = B.$$

Corollaire 7.16. Soient $\Omega, A, B \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, bornés et réguliers. Alors les trois propriétés suivantes sont vraies :

$$\partial\Omega = \partial(\overline{\Omega}), \quad \overline{(\Omega)^c} = \Omega^c, \quad \overline{A} \subset \overline{B} \Rightarrow A \subset B.$$

Proposition 7.17. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, non-vide, bornés, connexes, réguliers et tels que les complémentaires $(\overline{A})^c$ et $(\overline{B})^c$ soient connexes. Alors

$$\partial A \subset \partial B \Rightarrow A = B.$$

Démonstration. Par passage au complémentaire, nous avons

$$A \cup (\overline{A})^c \supset B \cup (\overline{B})^c. \quad (7.33)$$

Puisque $(\overline{A})^c$ et $(\overline{B})^c$ sont non-bornés et connexes, on a nécessairement

$$(\overline{B})^c \subset (\overline{A})^c,$$

ce qui implique, encore une fois par passage au complémentaire et par le corollaire 7.16,

$$A \subset B. \quad (7.34)$$

Revenant à l'inclusion (7.33), par connexité, nous avons

$$B \subset A \quad \text{ou} \quad B \subset (\bar{A})^c.$$

Si on avait $B \subset (\bar{A})^c$, alors par (7.34), nous aurions

$$A \subset B \subset (\bar{A})^c,$$

ce qui est absurde, d'où, nécessairement

$$B \subset A,$$

et donc $A = B$. □

Proposition 7.18. Soient $A, B \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, bornés. Alors

$$\begin{cases} A \subset B \\ \text{mes}(A) = \text{mes}(B) \\ \text{int}(\bar{A}) = A \end{cases} \Rightarrow A = B.$$

Démonstration. Etape 1. Nous commençons par montrer que

$$B \setminus A \subset \partial A.$$

Soit $x \in B \setminus A = B \cap A^c$ et supposons par l'absurde que $x \notin \partial A$. Puisque $x \in A^c \setminus \partial A = \bar{A}^c$, il existe un voisinage ouvert $U \subset (\bar{A})^c$ contenant x . Or, B étant ouvert et $x \in B$, on peut prendre U suffisamment petit pour avoir

$$x \in U \subset B \cap (\bar{A})^c.$$

Ceci est absurde, car, par hypothèse

$$0 < \text{mes}(U) \leq \text{mes}(B \cap (\bar{A})^c) = \text{mes}(B) - \text{mes}(A) = 0.$$

Etape 2. De ce qui précède, nous avons

$$B = (B \setminus A) \cup A \subset \partial A \cup A = \bar{A},$$

d'où, par définition de l'intérieur d'un ensemble et par hypothèse,

$$B \subset \text{int}(\bar{A}) = A,$$

ce qui conclut la preuve. □

Lemme 7.19. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et lipschizien et une application $U \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que si

$$\|U - \text{id}\|_{C^1} \leq \varepsilon,$$

alors $U \in \text{Diff}(\bar{\Omega}; U(\bar{\Omega}))$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que U est injective. La preuve se déroule en trois étapes.

Etape 1. Nous montrons d'abord que l'on peut, sans perte de généralité, se restreindre à Ω convexe. Soit $B_R \subset \mathbb{R}^n$ la boule centrée à l'origine et de rayon $R > 0$ suffisamment grand pour que $\overline{\Omega} \subset B_R$. Puisque Ω est lipschitzien, il existe une application

$$E : C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) \rightarrow C^1(\overline{B_R}; \mathbb{R}^n)$$

telle que (voir [9], théorème 16.11)

$$E(U)|_{\overline{\Omega}} = U \quad \text{et} \quad \|E(U)\|_{C^1(\overline{B_R}; \mathbb{R}^n)} \leq K \|U\|_{C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)},$$

où $K > 0$ ne dépend pas de U . En particulier,

$$\|E(U) - \text{id}\|_{C^1} \leq K \|U - \text{id}\|_{C^1} \leq K\varepsilon$$

et si $E(U)$ est injective sur B_R , alors U est injective sur $\overline{\Omega}$.

Etape 2. Montrons que ∇U est définie positive pour ε assez petit. Par hypothèse,

$$|\nabla U(x) - I_n| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

d'où, pour tout $p \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \overline{\Omega}$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla U(x) p; p \rangle &= \langle (\nabla U(x) - I_n) p; p \rangle + |p|^2 \\ &\geq \underbrace{(1 - \varepsilon)}_{=: \Lambda > 0} |p|^2. \end{aligned}$$

Etape 3. Par l'étape 1, nous supposons que Ω est convexe. Soient $x_1, x_2 \in \overline{\Omega}$ tels que $x_1 \neq x_2$. Par convexité de Ω , nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \langle U(x_1) - U(x_2); x_1 - x_2 \rangle &= \int_0^1 \frac{d}{dt} \langle [U(x_2 + t(x_1 - x_2))]; x_1 - x_2 \rangle dt \\ &= \int_0^1 \langle [\nabla U(x_2 + t(x_1 - x_2))(x_1 - x_2)]; x_1 - x_2 \rangle dt \\ &\geq \Lambda |x_1 - x_2|^2 > 0, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'étape 2 dans l'avant-dernière inégalité, d'où $U(x_1) \neq U(x_2)$, ce qui termine la preuve. \square

CHAPITRE 8

L'ÉQUATION DES ONDES SEMI-LINÉAIRE

Dans ce chapitre, nous appliquerons la méthode du point fixe sur l'équation des ondes semi-linéaires

$$\begin{cases} u_{tt}(x, t) - c^2 \Delta u(x, t) + Q(x, t, u(x, t)) = 0 & : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & : x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Ce problème est classique dans la théorie des équations hyperboliques non-linéaires. Voir John [42], Sogge [55] et Strauss [56].

8.1 Le résultat principal

Sans perte de généralité, nous supposons $c = 1$, quitte à effectuer un changement de variable. Commençons par fixer des notations qui seront utilisées tout au long du chapitre.

Notation 8.1. Pour tout $T > 0$ nous écrivons

$$\mathbb{R}_T^n := \mathbb{R}^n \times (0, T) \quad \text{et} \quad \overline{\mathbb{R}_T^n} := \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Soit $Q \in C^k(\overline{\mathbb{R}_T^n} \times \mathbb{R})$, $Q = Q(x, t, y)$. Soit un multi-indice $a = (a_1, a_2)$ avec $a_1 \in \mathbb{N}^n$ et $a_2 \in \mathbb{N}$, et $b \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq |a|, b \leq k$. Alors nous notons les dérivées partielles

$$D_{x,t}^a Q := \frac{\partial^{|a|} Q}{\partial x^{a_1} \partial t^{a_2}} \quad \text{et} \quad D_y^b Q := \frac{\partial^b Q}{\partial y^b}.$$

De plus, pour tout $u \in C^0(\mathbb{R}_T^n)$, nous notons

$$Q[u] = Q[u](x, t) := Q(x, t, u(x, t)), \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n}.$$

Hypothèse 8.2. Soient

- $n = 1, 2, 3$, $m := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$, $r \in \mathbb{N}$ et $T > 0$;
- $g \in C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n)$;
- une constante $M > 0$ et une application $Q \in C^{r+m}(\overline{\mathbb{R}_T^n} \times [-M, M])$, $Q = Q(x, t, y)$ telle que, pour tout $(x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n}$ et $|y_1|, |y_2| \leq M$, nous avons les inégalités

$$|D_{x,t}^a Q(x, t, y_1) - D_{x,t}^a Q(x, t, y_2)| \leq \gamma_1(|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2|, \quad (8.1)$$

$$|D_{x,t}^b D_u^c Q(x, t, y_1) - D_{x,t}^b D_u^c Q(x, t, y_2)| \leq \gamma_2 |y_1 - y_2|, \quad (8.2)$$

avec $0 \leq |a|, |b| + c \leq r + m$, $c \geq 1$ et $\gamma_i > 0$ des constantes indépendantes de (x, t) ;

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|Q\|_{C^{r+m}} \leq \lambda.$$

Remarque 8.3. Les espaces de fonctions $C^r(\mathbb{R}^n)$ sont compris au sens de la définition A.1, c'est-à-dire que si $u \in C^r(\mathbb{R}^n)$, alors u et ses dérivées jusqu'à l'ordre r sont *bornées* dans \mathbb{R}^n .

Théorème 8.4. Sous les hypothèses 8.2, il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, T, M, \lambda, \gamma_i) > 0$ tel que si Q , g et h satisfont

$$\|Q[0]\|_{C^{r+m}} + \|g\|_{C^{r+1+m}} + \|h\|_{C^{r+m}} \leq \varepsilon, \quad (8.3)$$

alors le problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + Q[u] = 0 & \text{dans } \mathbb{R}_T^n \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (8.4)$$

admet une unique solution $u \in C^{r+2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$. De plus, il existe une constante

$$K = K(r, T, M, \lambda, \gamma_i) > 0$$

telle qu'on ait l'inégalité

$$\|u\|_{C^{r+2}} \leq K (\|Q[0]\|_{C^{r+m}} + \|g\|_{C^{r+1+m}} + \|h\|_{C^{r+m}}).$$

Démonstration. Fixons le cadre fonctionnel. Soient les espaces de fonction

$$\begin{aligned} X &:= C^{r+2}(\overline{\mathbb{R}_T^n}), \quad Y := C^{r+m}(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \times C^{r+1+m}(\mathbb{R}^n) \times C^{r+m}(\mathbb{R}^n) \\ Z &:= C^r(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \times C^r(\mathbb{R}^n) \times C^r(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Soient les applications $L : X \rightarrow Z$ et $Q : X \rightarrow Y$ définies par

$$Lu = Lu(x, t) := (u_{tt}(x, t) - u_{xx}(x, t), u(x, 0), u_t(x, 0)),$$

$$\mathcal{Q}[u] = \mathcal{Q}[u](x, t) := (Q(x, t, u(x, t)) - Q(x, t, 0), 0, 0), \quad \mathcal{Q}[0] = 0.$$

Soit $F \in Y$ défini par

$$F(x, t) := (Q(x, t, 0), g(x), h(x)).$$

Nous avons alors l'équation équivalente

$$Lu + \mathcal{Q}[u] = F.$$

Vérifions les trois hypothèses du théorème 2.8. Puisque X est un espace de Banach (voir remarque A.3) et $Y \subset Z$, alors l'hypothèse (h_{XY}) est vérifiée. Les hypothèses $(h_{\mathcal{L}})$ et $(h_{\mathcal{Q}})$ sont respectivement vérifiées par le théorème B.11 et par le lemme 8.9, ce qui termine la preuve. \square

Remarque 8.5.

- (i) Si $n > 3$, alors on a nécessairement besoin que $f \in C^m(\overline{\mathbb{R}_T^n})$, avec $m \geq 3$. Puisque la solution de l'équation des ondes ne peut pas gagner en régularité, il n'est plus possible de trouver une application non-linéaire $Q \in C^m(\overline{\mathbb{R}_T^n} \times \mathbb{R})$ telle que

$$(x, t) \mapsto Q(x, t, u(x, t)) \in C^m(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \quad \text{si} \quad u \in C^2(\overline{\mathbb{R}_T^n}).$$

- (ii) Nous pouvons généraliser le résultat avec un terme semi-linéaire $Q(u, u_t, \nabla_x u)$ dépendant des dérivées premières, mais seulement pour $n = 1$. En effet, pour la même raison que dans la remarque précédente, l'absence de gain de régularité ne nous laisse, au mieux, que la possibilité d'avoir

$$Q(u, u_t, \nabla_x u) \in C^1(\overline{\mathbb{R}_T^n}),$$

alors que la régularité minimale requise pour $n \geq 2$ est de classe C^2 .

- (iii) Nous ne sommes pas en mesure d'améliorer le résultat avec des paires espaces de fonctions ayant un ordre de dérivation différent, c'est-à-dire utiliser

$$\begin{aligned} X_1 &:= C^2(\overline{\mathbb{R}_T^n}), \quad X_2 := C^{r+2}(\overline{\mathbb{R}_T^n}), \\ Y_1 &:= C^m(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \times C^{m+1}(\mathbb{R}^n) \times C^m(\mathbb{R}^n), \\ Y_2 &:= C^{r+m}(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \times C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n) \times C^{r+m}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

avec $r > 0$ entier, car la proposition A.5 n'est pas applicable ici.

Le corollaire suivant traite du cas particulier où la composante non-linéaire Q à ses variables (x, t) et u séparées par un produit.

Hypothèse 8.6. Soient

- $n = 1, 2, 3$, $m := \lceil \frac{n+2}{2} \rceil$, $r \in \mathbb{N}$ et $T > 0$;
- des fonctions $f, p \in C^{r+m}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$, $g \in C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n)$;
- une application $q = q(y) \in C^{r+m,1}[-M, M]$ telle que $q(0) = 0$ et

$$|q(u) - q(v)| \leq K_0(|u| + |v|)|u - v|, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n} \quad (8.5)$$

où $K_0 > 0$ est une constante ;

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|p\|_{C^{r+m}}, \|q\|_{C^{r+m,1}} \leq \lambda.$$

Corollaire 8.7. Sous les hypothèses 8.6, il existe $\varepsilon = \varepsilon(r, T, M, \lambda) > 0$ tel que si f , g et h satisfont

$$\|f\|_{C^{r+m}} + \|g\|_{C^{r+m+1}} + \|h\|_{C^{r+m}} \leq \varepsilon,$$

Alors le problème semi-linéaire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + p q(u) = f & \text{dans } \mathbb{R}_T^n \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

admet une solution $u \in C^{r+2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$. De plus, il existe une constante $K = K(r, T, M, \lambda) > 0$ telle qu'on ait l'inégalité

$$\|u\|_{C^{r+2}} \leq K (\|f\|_{C^{r+m}} + \|g\|_{C^{r+m+1}} + \|h\|_{C^{r+m}}).$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 8.4 à

$$Q(x, t, y) := p(x, t)q(y) - f(x, t)$$

qui satisfait l'inégalité (8.1) grâce à l'hypothèse (8.5), et qui satisfait (8.2) grâce au fait que les dérivées de q sont lipschitziennes, par hypothèse. \square

Exemple 8.8. Soient $n = 1, 2, 3$, $p \geq m := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$ et l'application $q(u) := u|u|^p$. Alors $q \in C_{\text{loc}}^{m,1}(\mathbb{R})$ et, en procédant comme dans l'exemple 4.15, nous avons

$$|q(u) - q(v)| \leq C(|u| + |v|)|u - v| \quad \forall |u|, |v| \leq 1,$$

où $C = C(p) > 0$ est une constante. Ainsi, en appliquant le corollaire 8.7 au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + u|u|^p = f & \text{dans } \mathbb{R}_T^n \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (8.6)$$

il existe $\varepsilon = \varepsilon(T, p) > 0$ tel que si

$$\|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^{m+1}} + \|h\|_{C^m} \leq \varepsilon,$$

alors le problème 8.6 admet une solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ telle que

$$\|u\|_{C^2} \leq K (\|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^{m+1}} + \|h\|_{C^m}),$$

où $K = K(T, p) > 0$ est une constante.

8.2 Un lemme technique

Nous allons montrer un lemme technique utilisé dans la preuve du théorème 8.4.

Lemme 8.9. Sous les hypothèses 8.2, supposons de plus que

$$Q(x, t, 0) = 0, \quad \forall (x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n}. \quad (8.7)$$

Soient $u, v \in C^{r+2}(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ tels que $\|u\|_{C^{r+2}}, \|v\|_{C^{r+2}} \leq M$. Alors

$$Q[u] \in C^{r+m}(\overline{\mathbb{R}_T^n}) \quad (8.8)$$

et nous avons les inégalités

$$\|Q[u] - Q[v]\|_{C^{r+m}} \leq K (\|u\|_{C^{r+2}} + \|v\|_{C^{r+2}}) \|u - v\|_{C^{r+2}},$$

où $K > 0$ est une constante indépendante de u, v .

Démonstration. L'assertion (8.8) est évidente, car $m \leq 2$ pour $1 \leq n \leq 3$. Nous démontrons le lemme pour le cas $n = 3$, $m = 2$ et $r = 0$, les autres cas étant très similaires.

Etape 1. Dans cette étape préliminaire, nous montrons quelques inégalités qui seront utilisées dans la suite de la preuve. Nous désignerons par $K_i > 0$ des constantes indépendantes des variables x, t et y . Les inégalités (8.1) et (8.7) impliquent que pour tout $(x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n}$,

$$|Q_y(x, t, 0)| = \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q(x, t, h) - Q(x, t, 0)}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} K_0 |h| = 0.$$

Combiné avec l'inégalité (8.2), nous obtenons également

$$|Q_y(x, t, y)| \leq K_1 |y|, \quad \forall (x, t, y) \in \overline{\mathbb{R}_T^n} \times [-M, M].$$

De plus, puisque les applications considérées sont uniformément bornées, nous avons

$$|Q_{yy}(x, t, y)| \leq K_2, \quad \forall (x, t, y) \in \overline{\mathbb{R}_T^n} \times [-M, M].$$

En appliquant les mêmes raisonnements sur les dérivées de Q par rapport à x et t , nous avons, pour tout opérateur différentiel $D_{x,t}^a$ avec $0 \leq |a| \leq 2$, les inégalités

$$|D_{x,t}^a Q_y(x, t, y)| \leq K_1 |y|, \quad \forall (x, t, y) \in \overline{\mathbb{R}_T^n} \times [-M, M], \quad (8.9)$$

$$|D_{x,t}^a Q_{yy}(x, t, y)| \leq K_2, \quad \forall (x, t, y) \in \overline{\mathbb{R}_T^n} \times [-M, M]. \quad (8.10)$$

Etape 2. Montrons l'inégalité

$$\|Q[u] - Q[v]\|_{C^2} \leq K (\|u\|_{C^2} + \|v\|_{C^2}) \|u - v\|_{C^2}, \quad (8.11)$$

avec $u, v \in C^2(\overline{\mathbb{R}_T^n})$ tels que $\|u\|_{C^2}, \|v\|_{C^2} \leq M$. Soient $(x, t) \in \overline{\mathbb{R}_T^n}$.

1. Par (8.1), nous avons directement

$$\begin{aligned} |Q[u](x, t) - Q[v](x, t)| &\leq K_0 (|u| + |v|) |u - v| \\ &\leq K_0 (\|u\|_{C^2} + \|v\|_{C^2}) \|u - v\|_{C^2}, \end{aligned}$$

2. L'estimation des dérivées partielles d'ordre 1 étant identique pour chaque variable, nous effectuons uniquement celle en t . Puisque

$$\frac{\partial Q(x, t, u(x, t))}{\partial t} = Q_t(x, t, u(x, t)) + Q_y(x, t, u(x, t)) u_t(x, t),$$

alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} [Q[u](x, t) - Q[v](x, t)] \right| &= |Q_t[u] + Q_y[u] u_t - Q_t[v] + Q_y[v] v_t| \\ &\leq |Q_t[u] - Q_t[v]| + |Q_y[u]| |u_t - v_t| \\ &\quad + |Q_y[u] - Q_y[v]| |v_t|. \end{aligned}$$

Les inégalités (8.1), (8.2) et (8.9) impliquent que

$$|Q_t[u] - Q_t[v]| \leq K_0 (|u| + |v|) |u - v|,$$

$$|Q_y[u] - Q_y[v]| \leq K_1|u - v|, \quad |Q_y[u]| \leq K_1|u|,$$

d'où

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} [Q[u](x, t) - Q[v](x, t)] \right| &\leq K_0(|u| + |v|)|u - v| + K_1|u||u_t - v_t| \\ &\quad + K_1|u - v||v_t| \\ &\leq K_3(\|u\|_{C^2} + \|v\|_{C^2})\|u - v\|_{C^2}. \end{aligned}$$

3. Pour l'estimation des dérivées partielles d'ordre 2, nous en effectuons également une seule. Puisque

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Q(x, t, u(x, t))}{\partial x_i \partial x_j} &= Q_{x_i x_j}[u] + Q_{x_i y}[u]u_{x_j} + Q_{x_j y}[u]u_{x_i} \\ &\quad + Q_{yy}[u]u_{x_i}u_{x_j} + Q_y[u]u_{x_i x_j}, \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [Q[u](x, t) - Q[v](x, t)] \right| &\leq |Q_{x_i x_j}[u] - Q_{x_i x_j}[v]| + |Q_{x_i y}[v]||u_{x_i} - v_{x_i}| \\ &\quad + |Q_{x_j y}[u] - Q_{x_j y}[v]||u_{x_j}| + |Q_{x_i y}[u] - Q_{x_i y}[v]||u_{x_i}| + |Q_{x_j y}[v]||u_{x_j} - v_{x_j}| \\ &\quad + |Q_{yy}[u] - Q_{yy}[v]||u_{x_i}||u_{x_j}| + |Q_{yy}[v]||u_{x_i} - v_{x_i}||u_{x_j}| \\ &\quad + |Q_{yy}[v]||v_{x_i}||u_{x_j} - v_{x_j}| + |Q_y[u] - Q_y[v]||u_{x_i x_j}| + |Q_y[v]||u_{x_i x_j} - v_{x_i x_j}| \\ &\leq K_0(|u| + |v|)|u - v| + K_1|u - v|(|u_{x_i}| + |u_{x_j}|) + K_1|u - v||u_{x_i}||u_{x_j}| \\ &\quad + K_1|v|(|u_{x_i} - v_{x_i}| + |u_{x_j} - v_{x_j}|) + K_2|u_{x_i} - v_{x_i}||u_{x_j}| \\ &\quad + K_2|v_{x_i}||u_{x_j} - v_{x_j}| + K_1|u - v||u_{x_i x_j}| + K_1|v||u_{x_i x_j} - v_{x_i x_j}| \\ &\leq K_3(\|u\|_{C^2} + \|v\|_{C^2})\|u - v\|_{C^2} \end{aligned}$$

où nous avons utilisé les inégalités (8.1), (8.2), (8.9) et (8.10), ce qui termine de montrer (8.11). □

Remarque 8.10. Par le fait que $x \mapsto Q(x, t, u(x, t))$ n'est pas défini sur un ensemble borné, nous ne pouvons pas utiliser les propriétés des compositions de fonctions (théorème A.9) pour obtenir les estimations voulues.

Deuxième partie

Le problème des deux puits

CHAPITRE 9

LE CAS NON-DÉGÉNÉRÉ $\text{DET}(A), \text{DET}(B) \neq 0$

Nous allons étudier dans les prochains chapitres un problème d'inclusion différentielle appelé le *problème des deux puits*, dont la formulation est la suivante. Etant donnés deux matrices $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné, et une application $u_0 : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^2$ affine, trouver une application $u \in W^{1,\infty}(\Omega, \mathbb{R}^2)$ satisfaisant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.1)$$

où, pour toute matrice $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, on a noté

$$\mathbb{S}_M := SO(2)M = \left\{ R_\varphi M : R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \right\}.$$

Les « deux puits » sont les ensembles \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B . Dans ce chapitre, nous allons traiter le problème des deux puits (9.1) pour le cas *non-dégénéré* où les matrices A, B sont inversibles, c'est-à-dire

$$\det(A), \det(B) \neq 0.$$

Dans ce cas, l'existence de solutions *lipschitziennes* a été montrée notamment par Dacorogna-Marcellini [12]-[14], suivant une méthode basée sur le théorème des catégories de Baire, et par Müller-Sverak [49], suivant la méthode dite d'intégration convexe de Gromov [35].

Nous allons nous poser la question de savoir s'il est possible de trouver des solutions un peu plus régulières que lipschitziennes, disons de classe C^1_{morc} . Nous verrons qu'il est nécessaire de considérer des matrices A, B dont les valeurs singulières satisfont

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}).$$

Il y a essentiellement deux cas.

Le cas orthogonal : $\lambda_1(BA^{-1}) = \lambda_2(BA^{-1}) = 1$, $\det(BA^{-1}) = -1$. Ce cas a longuement été étudié par Dacorogna-Marcellini-Paolini [16]-[21] qui ont montré l'existence de solutions *localement affine par morceaux* et qu'il est possible de construire explicitement de telles solutions dans un domaine borné, de manière *fractale* près du bord.

Le cas non-orthogonal : $0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1})$, $\lambda_1(BA^{-1}) \neq \lambda_2(BA^{-1})$. Dans ce cas, Dacorogna-Marcellini-Paolini [21] ont montré qu'il n'existe pas de solution localement affine par morceaux non-triviale (c'est à dire identique à sa condition de bord).

Ainsi, l'orthogonalité de A, B est, dans un certain sens, nécessaire à l'existence de solutions non-triviales C_{morc}^1 pour le problème de Dirichlet. Cependant, leur preuve requiert l'hypothèse que le bord du domaine considéré soit constitué d'au plus sept composantes lisses. Le résultat principal de ce chapitre (théorème 9.13) propose une preuve éliminant cette hypothèse et généralisant ce résultat à des domaines convexes.

Dans la section 9.3, nous allons analyser l'existence de solutions affines par morceaux au problème des deux puits pour des domaines n'entrant pas dans le cadre du théorème 9.13 et nous ferons le lien avec *l'enveloppe rang-un convexe* $\text{Rco}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B)$ des deux puits, qui joue un rôle central dans l'existence de solutions pour des inclusions différentielles.

Les sections 9.4 et 9.5 regroupent les principaux résultats connus concernant le cas orthogonal et l'existence de solutions lipschitziennes.

9.1 Notations et résultats préliminaires

Nous commençons par établir des conditions nécessaires pour l'existence de solutions pour le problème des deux puits. La principale est la *rang-1 connexité* entre les puits \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B , c'est-à-dire l'existence d'une matrice de rotation $R_\varphi \in SO(2)$ telle que

$$\det(A - R_\varphi B) = 0.$$

Cette condition est explicitée dans le lemme suivant.

Lemme 9.1. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telles que $A \neq B$ et $\det(A), \det(B) \neq 0$. Alors les deux assertions suivantes sont vraies.

- (i) Le puits \mathbb{S}_A n'admet aucune rang-1-connexion non-triviale avec lui-même, c'est-à-dire

$$\det(A - R_\varphi A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

- (ii) Les puits \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B sont rang-1-connectés si et seulement

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}).$$

De plus, si on note

$$\lambda := \lambda_1(BA^{-1}) \text{sign}(\det(BA^{-1})) \quad \text{et} \quad \mu := \lambda_2(BA^{-1}),$$

alors

$$\det(A - R_\varphi B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi)(\lambda + \mu) = 1 + \lambda\mu.$$

En particulier, si $|\lambda| \neq \mu$, alors A est rang-un connecté aux matrices

$$R_{\pm\Theta} B \quad \text{avec} \quad \cos(\Theta) = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}, \quad \Theta \in [0, \pi].$$

Autrement, si $BA^{-1} = I_2^- := \text{diag}(-1, 1)$, alors \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B sont totalement rang-un connectés, c'est-à-dire

$$\det(R_\psi A - R_\varphi B) = 0, \quad \forall R_\varphi, R_\psi \in SO(2).$$

Remarque 9.2.

(i) Le cas où $BA^{-1} = I_2^-$ correspond au cas orthogonal, que nous ne traiterons pas ici.

(ii) Sans perte de généralité, nous pouvons réduire notre analyse aux matrices

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \Lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

En effet, puisque A, B sont inversibles, on peut utiliser la décomposition en valeurs singulières de la manière suivante : il existe des rotations $R_\varphi, R_\psi \in SO(2)$ telles que

$$BA^{-1} = R_\varphi \Lambda R_\psi.$$

Posons

$$v(x) := u(A^{-1}R_{-\psi}x), \quad x \in R_\psi A(\Omega),$$

qui satisfait

$$\nabla v(x) = \nabla u(A^{-1}R_{-\psi}x)A^{-1}R_{-\psi}.$$

Par conséquent,

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \quad \Leftrightarrow \quad \nabla v \in \mathbb{S}_{I_2} \cup \mathbb{S}_\Lambda.$$

Démonstration.

(i) Soit $R_\varphi \in SO(2)$. Alors

$$\det(A - R_\varphi A) = \det(A) \det(I - R_\varphi) = 2 \det(A)(1 - \cos(\varphi)).$$

Ainsi

$$\det(A - R_\varphi A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

(ii) Sans perte de généralité, nous pouvons choisir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad 0 < |\lambda| \leq \mu.$$

On calcule

$$\det(A - R_\varphi B) = \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda \cos(\varphi) & \mu \sin(\varphi) \\ -\lambda \sin(\varphi) & 1 - \mu \cos(\varphi) \end{pmatrix} = 1 + \lambda\mu - (\lambda + \mu) \cos(\varphi).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \det(A - R_\varphi B) = 0 & \Leftrightarrow \cos(\varphi)(\lambda + \mu) = 1 + \lambda\mu \\ & \Leftrightarrow -(\lambda + \mu) \leq 1 + \lambda\mu \leq \lambda + \mu \\ & \Leftrightarrow (1 + \lambda)(1 + \mu) \geq 0, \quad (1 - \lambda)(\mu - 1) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow 0 < |\lambda| \leq 1 \leq \mu. \end{aligned}$$

En particulier, si $\lambda \neq -1 \neq -\mu$, alors

$$\det(A - R_\varphi B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}.$$

Enfin, si $\lambda = -1 = \mu$, alors

$$\det(A - R_\varphi B) = 0, \quad \forall \varphi \in]-\pi, \pi].$$

□

Ainsi, on ne peut pas avoir de rang-1 connexion dans le même puits. C'est à dire, entre deux morceaux adjacents d'une solution affine par morceaux u , le gradient ∇u passe d'une valeur dans le puits \mathbb{S}_A à une valeur dans le puits \mathbb{S}_B , et vice-versa, mais ne reste jamais dans le même puits.

Voici deux lemmes élémentaires.

Lemme 9.3. Soit l'équation linéaire

$$Ax = b \tag{9.2}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus 0$ telle que $\det(A) = 0$ et $b \in \mathbb{R}^2$. Alors soit (9.2) n'admet aucune solution, soit l'ensemble des solutions forme une droite affine dans \mathbb{R}^2 .

Lemme 9.4. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Alors

$$\det(a \otimes b - c \otimes d) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \parallel c \quad \text{ou} \quad b \parallel d,$$

et

$$a \otimes b = c \otimes d \quad \Leftrightarrow \quad a \parallel c \quad \text{et} \quad b \parallel d,$$

où on a noté

$$a \otimes b := \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{pmatrix}.$$

Démonstration. La première affirmation découle de

$$\det(a \otimes b - c \otimes d) = (a_1 c_2 - a_2 c_1)(b_2 d_1 - b_1 d_2).$$

La seconde affirmation découle de la première et du fait que les vecteurs sont non-nuls. □

Les résultats suivants, établis par Dacorogna-Marcellini-Paolini [21], donnent explicitement la forme de la solution lorsque son gradient change de puits.

Lemme 9.5. Soient $\Lambda := \text{diag}(\lambda, \mu) \neq I_2$ avec

$$0 < |\lambda| \leq \mu,$$

des angles $\varphi, \psi \in]-\pi, \pi]$, un vecteur $\nu \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et un scalaire $\alpha \in \mathbb{R}$. Soit l'application u définie par

$$u(x) := \begin{cases} R_\varphi x & : \langle x; \nu \rangle > \alpha, \\ R_{\varphi+\psi} \Lambda x & : \langle x; \nu \rangle < \alpha. \end{cases}$$

Alors u peut être prolongée par continuité sur la ligne $\langle x, \nu \rangle$ si et seulement si les deux cas suivants se produisent.

Cas orthogonal. $\lambda = -1$, $\mu = 1$ et ν est parallèle au vecteur $(1 + \cos(\psi), \sin(\psi))$.

Cas non-orthogonal. $0 < \lambda \leq 1 \leq \mu$ avec au moins une inégalité stricte, $\psi = \pm\Theta$ et ν est parallèle au vecteur ν_{\pm} , où $\Theta \in [0, \pi]$ est défini par

$$\cos(\Theta) = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}, \quad \sin(\Theta) = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}\sqrt{1 - \lambda^2}}{\lambda + \mu},$$

et

$$\nu_{\pm} := \left(\pm\sqrt{1 - \lambda^2}, \sqrt{\mu^2 - 1} \right).$$

De plus, nous pouvons écrire

$$R_{\pm\Theta}\Lambda = I + \alpha_{\pm} \otimes \nu_{\pm} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\mu(1-\lambda^2)}{\mu+\lambda} & \mp \frac{\mu\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda+\mu} \\ \pm \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda+\mu} & 1 - \frac{\lambda(\mu^2-1)}{\mu+\lambda} \end{pmatrix},$$

où

$$\alpha_{\pm} = \left(\mp \frac{\mu\sqrt{1-\lambda^2}}{\mu+\lambda}, \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-1}}{\mu+\lambda} \right).$$

Démonstration. Voir [21], lemme 19. □

Remarque 9.6.

- (i) Le lemme nous dit qu'une solution affine par morceaux ne peut changer de valeurs entre les puits \mathbb{S}_{I_2} et \mathbb{S}_{Λ} qu'en « passant à travers » des lignes orthogonales aux deux vecteurs de l'énoncé.
- (ii) Par le lemme 9.1, Θ est bien défini si $0 < |\lambda| \leq 1 \leq \mu$ et $|\lambda| \neq 1$. En particulier,

$$\begin{aligned} \Theta = 0 & \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \mu = 1, \\ \Theta = \pi/2 & \Leftrightarrow \lambda\mu = -1, \\ \Theta = \pi & \Leftrightarrow \lambda = -1. \end{aligned}$$

- (iii) Si $|\lambda| = 1$ ou $\mu = 1$, alors ν_+ et ν_- sont collinéaires et ν doit être parallèle soit à $e_1 = (1, 0)$ (si $\mu = 1$) ou à $e_2 = (0, 1)$ (si $|\lambda| = 1$).

Le prochain lemme concerne le cas où deux de ces lignes s'intersectent.

Lemme 9.7. Soient $\Lambda := \text{diag}(\lambda, \mu)$ avec

$$0 < |\lambda| < 1 < \mu,$$

des angles $\varphi, \chi, \chi', \psi \in]-\pi, \pi]$ et des scalaires $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Soit l'application u définie par

$$u(x) := \begin{cases} R_{\varphi}x & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta \\ R_{\varphi+\chi}\Lambda x & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ R_{\varphi+\psi}x & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ R_{\varphi+\chi'}\Lambda x & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta. \end{cases}$$

Alors u peut être prolongée par continuité sur les lignes $\langle x; \nu_+ \rangle = \alpha$ et $\langle x; \nu_- \rangle = \beta$ si et seulement si

$$\lambda\mu = -1, \quad \chi = -\chi' = \pi/2 \quad \text{et} \quad \psi = \pi.$$

Démonstration. Voir [21], lemme 21. \square

Remarque 9.8. La seule possibilité d'avoir, sous les hypothèses du lemme, une fonction continue, est que

$$R_{-\varphi}u(x) = \begin{cases} x & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta \\ R_{\pi/2}\Lambda x & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ -x & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ -R_{\pi/2}\Lambda x & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta \end{cases}$$

pour un certain $\varphi \in]-\pi, \pi[$.

Avant d'énoncer le dernier résultat préliminaire, nous introduisons la définition suivante.

Définition 9.9. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversibles telles que

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}),$$

avec au moins une inégalité stricte. Soient les matrices Q, R permettant la décomposition en valeurs singulières $BA^{-1} = Q\Lambda R$, où $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$. Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et un ensemble $\Sigma \subset \Omega$. Alors on dit que Σ satisfait la *condition de lamination* (par rapport à A et B dans Ω) si l'ensemble $\Sigma' := RA(\Sigma) \subset RA(\Omega)$ est constitué de segments qui s'étendent jusqu'au bord de $RA(\Omega)$ et qui sont orthogonaux aux vecteurs

$$\nu_{\pm} := \left(\pm \sqrt{1 - \lambda_1^2}, \sqrt{\lambda_2^2 - 1} \right).$$

Remarque 9.10.

- (i) Si $\lambda_1(BA^{-1}) = 1$ ou $\lambda_2(BA^{-1}) = 1$, alors ν_+ et ν_- sont parallèles. On parle dans ce cas de *lamination simple*. Autrement nous avons une *lamination double*.
- (ii) En cas de lamination double, une intersection entre deux segment de Σ dans Ω est un *sommet interne*.

Le résultat suivant caractérise les lignes de discontinuités d'une solution affine par morceaux du problème des deux puits.

Théorème 9.11. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversibles telles que

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}),$$

avec au moins une inégalité stricte. Soit $u \in C_{\text{morc}}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant l'inclusion différentielle

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors u les trois assertions suivantes sont vraies.

1. u est affine par morceaux.
2. L'ensemble singulier

$$\Sigma_u := \{x \in \Omega : u \text{ n'est pas différentiable en } x\}$$

satisfait la contition de lamination (par rapport à A et B dans Ω).

3. Un sommet interne ne peut exister que si

$$\lambda\mu = -1.$$

Démonstration. Voir [21], théorème 25. □

Remarque 9.12.

- (i) La première affirmation est une conséquence du théorème de Liouville ([21], théorème 4).
- (ii) Une conséquence importante de ce théorème est que toute solution régulière sur Ω est « globalement » affine, et s'étend continuellement jusqu'au bord. En particulier, il ne peut pas y avoir une accumulation de morceaux jusqu'au bord, contrairement au cas orthogonal, où cette accumulation est nécessaire.
- (iii) Si $A = I_2$ et $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$, la condition de lamination implique que les lignes de discontinuité de u sont des segments qui se prolongent jusqu'au bord de Ω et prependiculars aux vecteurs

$$\nu_{\pm} := \left(\pm\sqrt{1 - \lambda^2}, \sqrt{\mu^2 - 1} \right).$$

9.2 Non-existence de solutions affines par morceaux

Nous montrons maintenant le résultat principal de ce chapitre. Il s'agit d'un théorème de non-existence de solutions C^1_{morc} pour le problème des deux puits, dans le cas non-orthogonal.

Théorème 9.13. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et de classe C^1_{morc} . Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ des matrices inversibles telles que

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) \leq 1 \leq \lambda_2(BA^{-1}),$$

avec au moins une des inégalités stricte. Soit $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tel que $C \notin \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.3)$$

n'admet pas de solution $u \in C^1_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée.

1. Ω est borné,
2. Ω est convexe et la normale extérieure au bord possède au moins trois valeurs distinctes.

Remarque 9.14.

- (i) Ce théorème est une généralisation d'un résultat de Dacorogna-Marcellini-Paolini ([21], théorème 28), qui ont établi la non-existence pour des domaines bornés dont le bord possède au plus sept morceaux C^1 .
- (ii) Si $\partial\Omega$ est constitué de cotés ayant une ou deux directions distinctes (par exemple un demi-plan ou un angle de plan), alors il est possible de construire des solutions non-triviales au problème des deux puits (voir section 9.3).

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il existe une solution $u \in C_{\text{morc}}^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ au problème (9.3). Sans perte de généralité, on peut supposer que $A = I_2$, $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$, avec

$$0 < |\lambda| \leq 1 \leq \mu, \quad |\lambda| \neq \mu.$$

On peut de plus supposer que Ω est connexe, quitte à traiter chaque composante connexe séparément.

La preuve se déroule en cinq étapes : dans l'étape 1, nous appliquons le théorème 9.11 pour expliciter la structure de l'ensemble singulier Σ_u . Dans l'étape 2, nous montrons plusieurs affirmations préliminaires. Dans l'étape 3, nous traitons le cas où $|\lambda| = 1$ ou $\mu = 1$ (lamination simple). Dans les étapes 4 et 5, nous montrons le théorème pour les cas respectivement borné et non-borné.

Etape 1. Par le théorème 9.11, l'ensemble singulier Σ_u satisfait la condition de lamination, c'est-à-dire Σ_u est non-vide et est constitué de segments fermés entièrement contenus dans $\bar{\Omega}$, dont les extrémités atteignent $\partial\Omega$. Ces segments sont tous orthogonaux, soit par rapport aux vecteur ν_+ , soit par rapport au vecteur ν_- , définis par

$$\nu_{\pm} := \left(\pm\sqrt{1-\lambda^2}, \sqrt{\mu^2-1} \right).$$

Si $|\lambda| = 1$ ou $\mu = 1$, alors tous les segments de la lamination sont parallèles, car orthogonaux à un unique vecteur (dans ce cas, on a une lamination simple, autrement on a une lamination double).

De plus, u est affine par morceaux et le gradient ∇u est constant sur chaque composante connexe de $\Omega \setminus \Sigma_u$. Chaque fois que u traverse un segment de la lamination, alors la valeur de ∇u passe du puits \mathbb{S}_A au puits \mathbb{S}_B et vice-versa, suivant les schémas, à une rotation près,

$$A \xrightarrow{\nu_+} R_{\Theta} B \xrightarrow{\nu_+} A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\nu_-} R_{-\Theta} B \xrightarrow{\nu_-} A,$$

où $0 \leq \Theta \leq \pi$ est défini par

$$\cos(\Theta) = \frac{1+\lambda\mu}{\lambda+\mu} \quad \text{et} \quad \sin(\Theta) = \frac{\sqrt{\mu^2-1}\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda+\mu}.$$

De plus, nous pouvons exprimer

$$R_{\pm\Theta} B = A + \alpha_{\pm} \otimes \nu_{\pm},$$

avec

$$\alpha_{\pm} = \left(\mp \frac{\mu\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda+\mu}, \frac{\lambda\sqrt{\mu^2-1}}{\mu+\lambda} \right).$$

S'il existe un sommet intérieur, c'est-à-dire une intersection entre deux segments de la lamination (nécessairement double), alors on a nécessairement

$$\lambda = \frac{-1}{\mu} \neq -1.$$

Ceci implique que

$$\cos(\Theta) = 0 \quad \text{et} \quad \sin(\Theta) = 1,$$

d'où $\Theta = \pi/2$. De plus, vu qu'un sommet intérieur est une intersection de segments orthogonaux aux vecteurs ν_+ et ν_- , un tel sommet est une solution de l'équation

$$\begin{cases} \langle x; \nu_+ \rangle = \alpha \\ \langle x; \nu_- \rangle = \beta, \end{cases}$$

pour certains $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Par le lemme 9.7 la seule solution u affine par morceaux qui soit continue autour de ce sommet est nécessairement de la forme

$$R_{-\varphi}u(x) = \begin{cases} x & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta \\ R_{\pi/2}Bx & : \langle x; \nu_+ \rangle > \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ -x & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle < \beta \\ -R_{\pi/2}Bx & : \langle x; \nu_+ \rangle < \alpha, \langle x; \nu_- \rangle > \beta, \end{cases} \quad (9.4)$$

où $\varphi \in (-\pi, \pi]$ et

$$R_{\pi/2}B = \begin{pmatrix} 0 & -\mu \\ -1/\mu & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, nous pouvons exprimer

$$\pm R_{\pi/2}B = A + \alpha_{\pm} \otimes \nu_{\pm},$$

avec

$$\nu_{\pm} = \left(\pm \frac{1}{\mu}, -1 \right), \quad \alpha_{\pm} = (\mp \mu, 1).$$

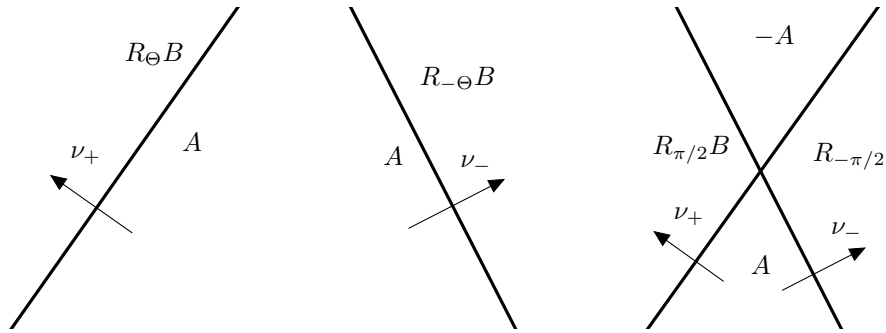


FIGURE 9.1 – Lamination double et sommet intérieur.

Etape 2. Nous énonçons six affirmations préliminaires, mais ne montrons que les trois dernières. Les trois premières ont été montré par Dacorogna-Marcellini-Paolini [21] (théorème 28 et remarque 30).

Affirmation 1. Les parties lisses de $\partial\Omega$ sont droites. Donc, pour qu'une solution affine existe, il faut nécessairement que Ω soit un polygône.

Affirmation 2. Les segments de Σ_u ont leurs extrémités seulement sur les points de discontinuité (i.e. les sommets) de $\partial\Omega$ et, réciproquement, chaque sommet de $\partial\Omega$ est atteint par des segments de lamination via l'intérieur de Ω . On dira qu'un sommet est *simple* s'il n'est atteint que par un seul segment, et *double* s'il est atteint par deux segments. Si la lamination est simple, alors tous les sommets sont simples.

Affirmation 3. Si Ω est borné, alors chaque normale à la lamination (les vecteurs ν_{\pm}) admet au moins un sommet simple. Plus précisément, il existe au moins un sommet sur $\partial\Omega$ qui soit un *point extrême* par rapport au vecteur ν_+ (resp. ν_-) et qui est donc l'extrémité d'une seule ligne de discontinuité arrivant depuis l'intérieur de Ω orthogonale à ν_- (resp. ν_+).

Affirmation 4. Chaque valeur distincte de ∇u dans une cellule au bord de Ω induit une unique direction normale à l'interface $\partial\Omega$ (voir figure 9.2). En effet, supposons que $\nabla u = A$ sur au moins deux cellules à l'interface et posons $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ des vecteurs normaux à $\partial\Omega$ sur ces deux cellules. Vu que $\nabla u = C$ sur $\partial\Omega$ et $C \notin \mathbb{S}_A$, alors il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que

$$C = A + c_1 \otimes \gamma_1 = A + c_2 \otimes \gamma_2,$$

ce qui implique, par le lemme 9.4, que γ_1 et γ_2 sont parallèles.

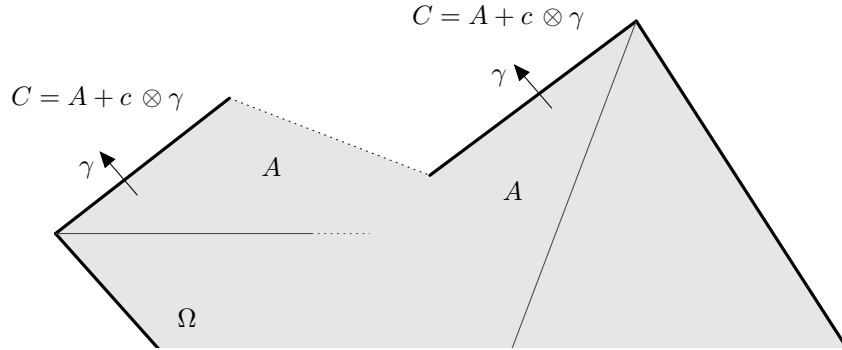


FIGURE 9.2 – Les cotés de $\partial\Omega$ sur lesquels $\nabla u = A$ sont parallèles.

Affirmation 5. En cas de lamination double (i.e. $\nu_+ \nparallel \nu_-$ et $R_{\Theta} \neq R_{-\Theta}$), si ∇u prend au moins les trois valeurs (à une multiplication par une matrice près) $R_{\Theta}B$, A et $R_{-\Theta}B$ sur des segments de $\partial\Omega$, alors le segment sur lequel $\nabla u = A$ est normal à ν_+ ou ν_- . En effet, puisque $\nabla u = C$ à l'extérieur de Ω et $C \notin \mathbb{S}_A$, il existe des vecteurs $c, \gamma \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tels que

$$C = A + c \otimes \gamma.$$

De plus, par l'étape 1, nous avons

$$R_{\pm\Theta}B = A + \alpha_{\pm} \otimes \nu_{\pm}.$$

Par conséquent, puisque ∇u vaut $R_{\pm\Theta}B$ sur des morceaux de $\partial\Omega$, la continuité de u à l'interface impliquent

$$\det(C - R_{\pm\Theta}B) = \det(c \otimes \gamma - \alpha_{\pm} \otimes \nu_{\pm}) = 0,$$

d'où, par le lemme 9.4

$$\begin{cases} \gamma \parallel \nu_+ & \text{ou} & \alpha_+ \parallel c, \\ \gamma \parallel \nu_- & \text{ou} & \alpha_- \parallel c. \end{cases}$$

On ne peut avoir ni $\alpha_+ \parallel \alpha_-$, ni $\nu_+ \parallel \nu_-$, car sinon on aurait une lamination simple. Par conséquent, on a nécessairement

$$\gamma \parallel \nu_+ \quad \text{ou} \quad \gamma \parallel \nu_-.$$

Par l'affirmation 4, on a donc que pour chaque cellule de $\Omega \setminus \Sigma_u$ telle que $\nabla u = A$, la normale avec l'interface de $\partial\Omega$ est parallèle à ν_+ ou à ν_- .

Affirmation 6. Si Ω est convexe, alors aucun côté *borné* de $\partial\Omega$ n'est normal aux vecteurs ν_{\pm} . En effet, s'il existe un segment $D \subset \partial\Omega$ normal à, disons, ν_+ , alors, par l'affirmation 2, les deux extrémités de D sont des sommets simples atteints par une ligne de discontinuité nécessairement normale à ν_- (autrement les segments adjacents à D seraient parallèle à D). En conséquence, par l'étape 1, ∇u prend la même valeur sur les deux morceaux de $\partial\Omega$ adjacents à D . Or, par l'affirmation 4, ces deux côtés doivent être parallèle, ce qui est impossible, car les deux cas de figures possibles contredisent soit la convexité de Ω , soit le fait que chaque sommet est joint par une ligne de discontinuité depuis l'intérieur de Ω (voir figure 9.3).

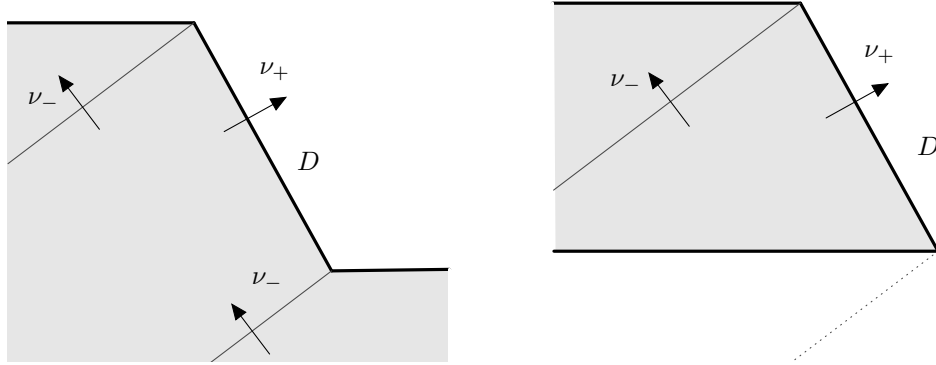


FIGURE 9.3 – Un segment $D \subset \partial\Omega$ ne peut être orthogonal à la lamination, car cela contredit soit la convexité (à gauche) ou le fait les deux extrémités du segment sont des sommets simples (à droite).

Etape 3. Nous montrons que l'on peut exclure le cas de la lamination simple où $|\lambda| = 1$ ou $\mu = 1$ (on notera ν la normale à la lamination). Si Ω est borné, alors par l'affirmation 3, il existe un sommet a du polygone $\partial\Omega$ qui est un point extrême par rapport au vecteur ν , et qui n'est donc atteint par aucune ligne de discontinuité, ce qui contredit l'affirmation

2. Dans le cas non-borné, la lamination simple implique que ∇u ne peut prendre que deux valeurs distinctes (une rotation de A et une rotation de B), ce qui est exclu par l'hypothèse des trois directions distinctes des normales à $\partial\Omega$ et l'affirmation 4.

Etape 4. A partir de maintenant, nous supposons que la lamination de Σ_u est double. Dans cette étape, nous montrons le théorème dans le cas où Ω est borné. Nous distinguons les deux cas où la lamination Σ_u admet, ou n'admet pas de sommet intérieur.

Etape 4.1. Supposons qu'il existe un sommet intérieur, c'est-à-dire une intersection entre au moins deux segments de la lamination Σ_u . Par l'étape 1, on a nécessairement une lamination double, avec $\lambda\mu = -1$, $\Theta = \pi/2$, et, par connexité de Ω , le gradient ne peut prendre que quatre valeurs sur $\Omega \setminus \Sigma_u$; plus précisément, il existe une rotation $R_\varphi \in SO(2)$ telle que

$$R_\varphi \nabla u \in \{\pm A, \pm R_{\pi/2} B\} \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

De plus, le gradient (à une rotation près) passe respectivement des valeurs A et $-A$ aux valeurs $R_{\pi/2} B$ et $-R_{\pi/2} B$ si le segment de lamination est orthogonal à ν_+ , et aux valeurs $-R_{\pi/2} B$ et $R_{\pi/2} B$ si le segment de lamination est orthogonal à ν_- , comme résumé par le schéma suivant

$$A \xrightarrow{\nu_+} R_{\pi/2} B \xrightarrow{\nu_+} A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\nu_-} -R_{\pi/2} B \xrightarrow{\nu_-} A.$$

On peut illustrer cette situation par la figure 9.4.

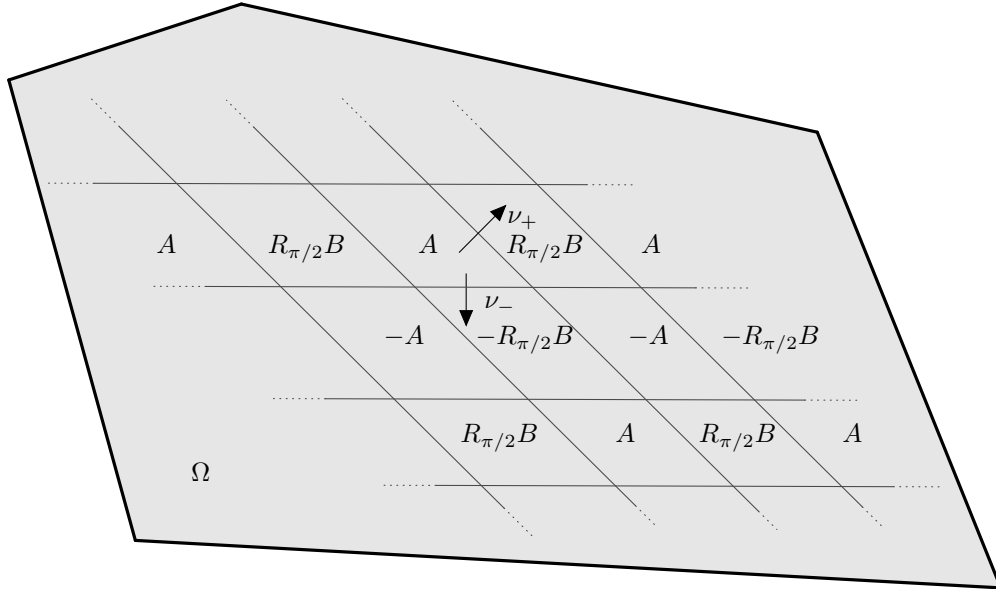


FIGURE 9.4 – Le gradient ne peut prendre que les quatre valeurs $\pm A, \pm R_{\pi/2} B$.

Par l'affirmation 3, vu que nous sommes dans le cas où Ω est borné, nous savons que les directions de la lamination ν_\pm admettent chacune au moins un sommet simple, que

nous notons a_+ et a_- respectivement. Dans les deux cellules autour de a_+ , le gradient ne peut prendre que les deux paires de valeurs admissibles

$$(A, R_{\pi/2}B) \quad \text{ou} \quad (-A, -R_{\pi/2}B).$$

De même, autour de a_- , le gradient ne peut valoir que

$$(A, -R_{\pi/2}B) \quad \text{ou} \quad (-A, R_{\pi/2}B).$$

Ainsi, ∇u prend au moins trois valeurs distinctes à l'interface $\partial\Omega$, disons $R_{\pi/2}B$, A et $-R_{\pi/2}B$ (les autres cas se traitent de la même manière). Comme précédemment, nous notons la condition de bord $C = A + c \otimes \gamma$ (voir figure 9.5).

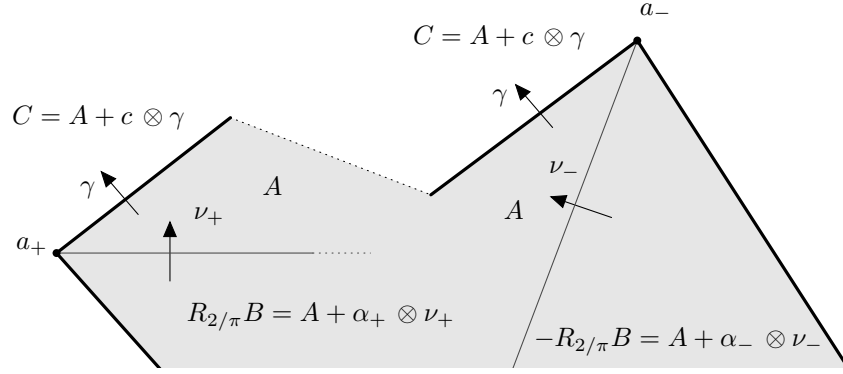


FIGURE 9.5 – Les sommets simples a_{\pm} , respectivement associés aux laminations orthogonales à ν_{\pm} .

Par l'affirmation 5, nous avons

$$\gamma \parallel \nu_+ \quad \text{ou} \quad \gamma \parallel \nu_-.$$

Disons que γ est parallèle à ν_+ . Seuls deux cas de figure sont possibles : soit la lamination orthogonale à ν_+ coïncide avec un côté de $\partial\Omega$, ce qui est impossible, car le sommet simple a_+ , ne serait atteint par aucun segment de la lamination via l'intérieur de Ω ; soit cette lamination est un prolongement à l'intérieur de Ω d'un segment de $\partial\Omega$ (illustré par la figure 9.6), ce qui est également impossible, car a_+ est un point extrême de $\partial\Omega$ par rapport à ν_- . En conclusion, une solution u ne peut pas admettre de sommet intérieur.

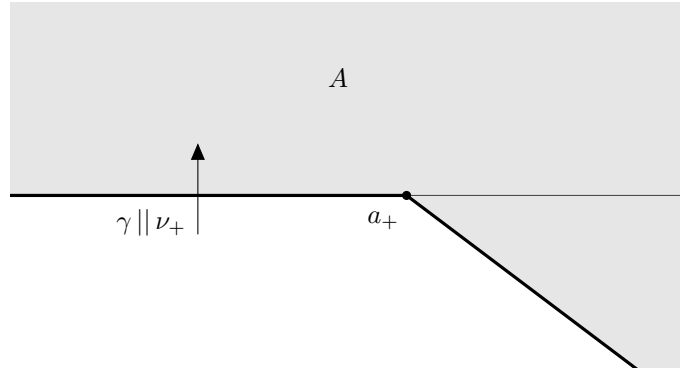


FIGURE 9.6 – Le fait qu’un ligne de discontinuité normale à ν_+ est un prolongement de $\partial\Omega$ contredit le fait que a_+ est un point extrême pour ν_+ .

Etape 4.2. Supposons qu’il n’y ait aucune intersection entre les segments de Σ_u . Par l’affirmation 3, il existe un sommet simple a associé au vecteur ν_+ . Notons $S \subset \Sigma_u$ le segment de la lamination orthogonal à ν_+ d’extrémité a , et b l’autre extrémité. Puisque les segments de Σ_u ne peuvent pas s’interrompre dans Ω et que Ω est borné, alors $b \in \partial\Omega$. Cette situation est illustrée par la figure 9.7 (notons que b est nécessairement sur une composante connexe de $\partial\Omega$ différente de celle contenant a , autrement il y aurait des intersections entre segments de Σ_u ; voir la preuve de la proposition 9.46).

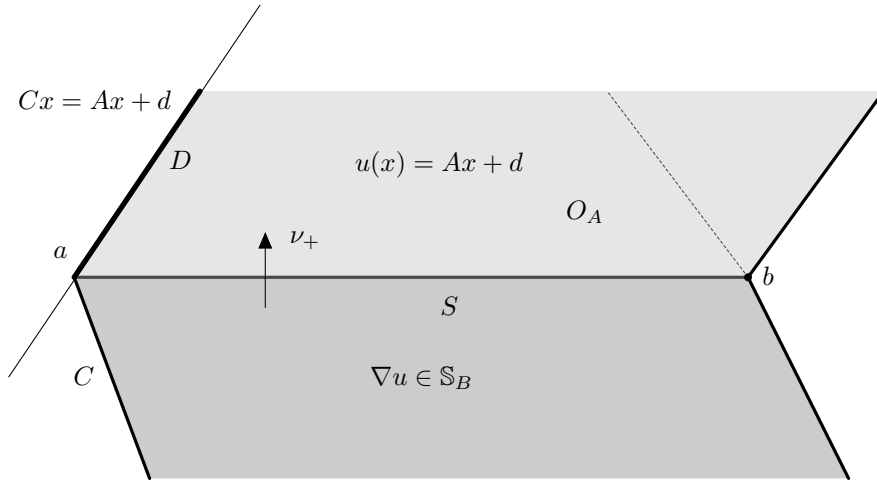


FIGURE 9.7 – Le segment D et le point b sont des solutions de $Cx = Ax + d$.

Dans les deux cellules adjacentes à S , qui sont chacune une composante connexe de $\Omega \setminus \Sigma_u$, le gradient ∇u prend ses valeurs dans \mathbb{S}_A pour l’une, \mathbb{S}_B pour l’autre. Disons que $\nabla u = A$ dans une de ces cellules, que nous notons O_A . L’ensemble $\overline{O_A} \cap \partial\Omega$ est constitué d’un segment D faisant l’interface entre la cellule O_A et le bord $\partial\Omega$. De plus, $\overline{O_A} \cap \partial\Omega$

contient également le point b , car, si ce n'était pas le cas, b serait séparé de O_A par une intersection de segments de Σ_u , ce qui est exclu.

Puisque u est affine sur O_A , alors $u(x) = Ax + d$ pour tout $x \in O_A$ et pour un certain $d \in \mathbb{R}^2$. Par continuité de u , la condition de bord de (9.3) implique que

$$Cx = Ax + d, \quad \forall x \in \overline{O_A} \cap \partial\Omega \quad \text{et} \quad \det(C - A) = 0,$$

Par le lemme 9.3, l'ensemble des solutions de l'équation $(A - C)x = d$ forme une droite affine dans \mathbb{R}^2 , contenant $\overline{O_A} \cap \partial\Omega$. Or $b \in \overline{O_A} \cap \partial\Omega$; par conséquent, b et D doivent être alignés, ce qui implique que le segment S , reliant b et D , est parallèle à D . Or S est un segment de lamination orthogonal à ν_+ , par définition, donc le côté $D \subset \partial\Omega$ est orthogonal à ν_+ , ce qui est impossible pour les mêmes raisons que dans l'étape 4.1. Par conséquent, il ne peut pas exister de solution à (9.3) si les sommets intérieurs ne sont pas admis, ce qui achève la preuve pour le cas borné.

Etape 5. Nous traitons maintenant le cas où Ω est non-borné, convexe et dont les segments constituant le bord peuvent prendre trois directions différentes. Vu que Ω est un polygône, il existe trois morceaux consécutifs de $\partial\Omega$, notés S_1 , S_2 et S_3 , ayant un vecteur normal distinct. Notons également a, b les deux sommets intermédiaires à ces trois morceaux, et O_1 , O_2 et O_3 les composantes connexes (cellules) de $\Omega \setminus \Sigma_u$ telles que $S_i \subset \partial O_i$. Par convexité, ces sommets peuvent être soit simple, soit double (c'est-à-dire ils ne peuvent être atteints que par une ou deux lignes de discontinuité, mais pas plus). Nous énumérons les quatre seuls cas possibles, et montrons que chacun aboutit à une contradiction.

Cas 1. Si les deux sommets sont simples et que la direction des lamination est la même, alors ∇u prend la même valeur sur S_1 et S_3 , et donc, par l'affirmation 1, ces segments sont parallèles, ce qui contredit l'hypothèse de départ des trois directions distinctes.

Cas 2. Si les deux sommets sont simples et leur lamination respective est de direction différente, alors ∇u prend, à multiplication près, les trois valeurs $R_{-\Theta}B$, A et $R_{\Theta}B$, ce qui implique, par l'affirmation 5 de l'étape 2 que S_2 est normal à ν_{\pm} , mais ceci est exclu, par l'affirmation 6.

Cas 3. Si les deux laminations sont doubles, alors par convexité, les quatre lignes de discontinuité atteignant les sommets a et b sont entièrement inclus dans un demi-plan délimité par le segment $[a, b]$. Vu que ces lignes de discontinuité sont constituées de deux paires de demi-droites (ou segments) parallèles, il existe une intersection entre deux de ces lignes sur le demi-plan les contenant.

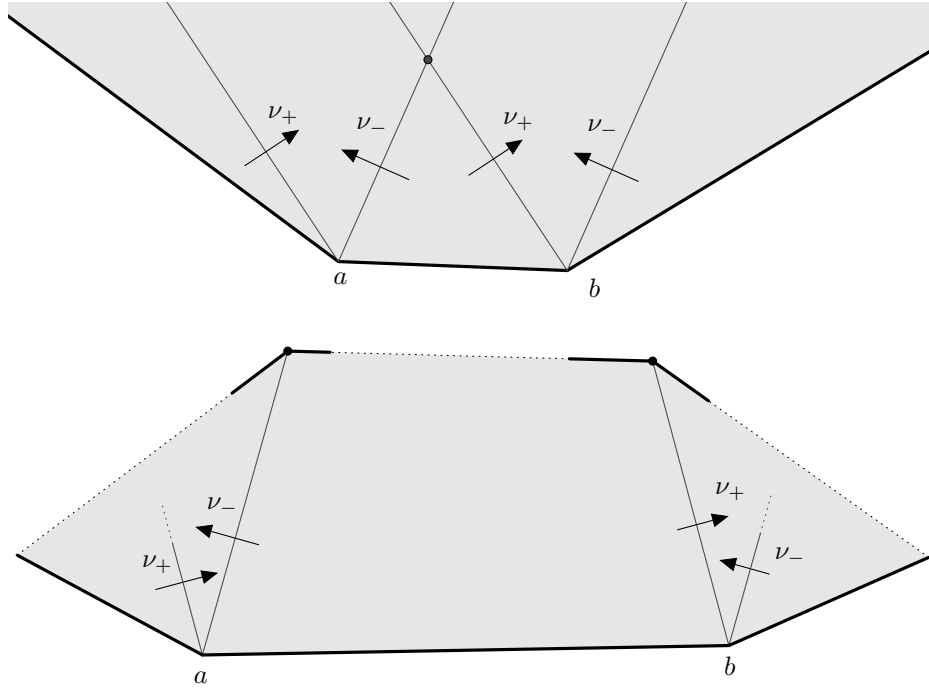


FIGURE 9.8 – Dans un domaine convexe, les laminations issues de deux sommets doubles successifs soit s’intersectent dans Ω (en haut), soit intersectent $\partial\Omega$ (en bas).

Deux cas sont possibles : premièrement, cette intersection est un sommet intérieur situé dans Ω (voir figure 9.8, en haut), et donc, comme dans l’étape 4.1, ∇u ne peut prendre que les quatre valeurs (à une rotation près) $\pm A, \pm R_{\pi/2}B$. Cependant, les segments S_1 , S_2 et S_3 étant séparés par une lamination double, les valeurs de ∇u restent dans le même puits sur ces segments, d’où S_1 et S_3 sont parallèles (affirmation 4), ce qui est absurde.

Deuxièmement, si l’intersection est située à l’extérieur de Ω , alors cela signifie qu’au moins une des lignes de discontinuité atteignant a et b est bornée dans Ω . Vu qu’elle ne peut pas s’interrompre à l’intérieur de Ω , elle atteint nécessairement un autre sommet de $\partial\Omega$ (voir figure 9.8, en bas). Par la même démarche qu’à l’étape 4.2, ceci aboutit également à une contradiction.

Cas 4. Si l’un des sommet est simple et le second est double, alors il y a également deux cas de figure. D’une part, si les deux lignes de discontinuité bordant la cellule O_2 sont orthogonales à deux vecteurs différents (ν_+ et ν_-), alors nous nous retrouvons exactement dans la même situation que le cas des sommets doubles : ces deux lignes s’intersectent dans le demi-plan délimité par le segment $[a, b]$ et contenant Ω . Un raisonnement identique à celui de l’étape 4 mène à une contradiction.

D’autre part, supposons que les deux lignes de discontinuité bordant O_2 sont parallèles, disons à ν_+ (voir figure 9.9, en haut). Supposons sans perte de généralité que a est le sommet simple, sa lamination est orthogonale à ν_+ , b est le sommet double et $\nabla u = A$

sur S_1 (tous les autres cas se traitent de la même façon). Par l'étape 1, en traversant les trois lignes de discontinuité depuis S_1 , les valeurs de ∇u varient de la manière suivante :

$$A \xrightarrow{\nu_+} R_\Theta B \xrightarrow{\nu_+} A \xrightarrow{\nu_-} R_{-\Theta} B.$$

Alors les valeurs de ∇u sur les trois segments S_i sont, à une rotation près, $R_\Theta B$, A et $R_{-\Theta} B$.

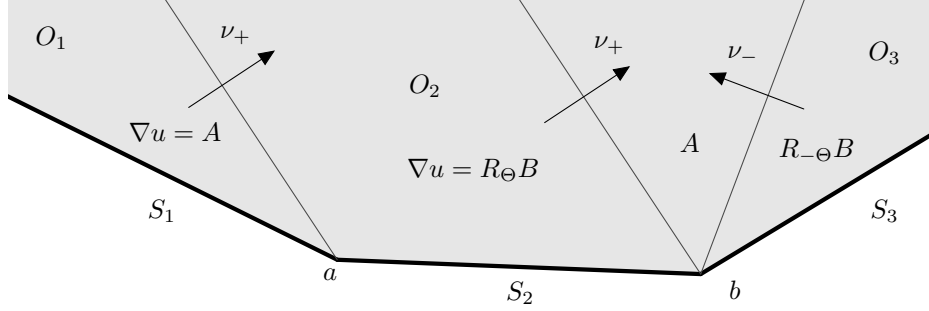


FIGURE 9.9 – Une sommet simple suivi d'un sommet double.

Par l'affirmation 5, le segment S_1 , sur lequel $\nabla u = A$, est orthogonal à ν_- . Ceci est impossible, car les deux seules directions orthogonales à ν_- contrediraient soit la convexité de Ω , soit le fait que a est un sommet simple (voir figure 9.10).

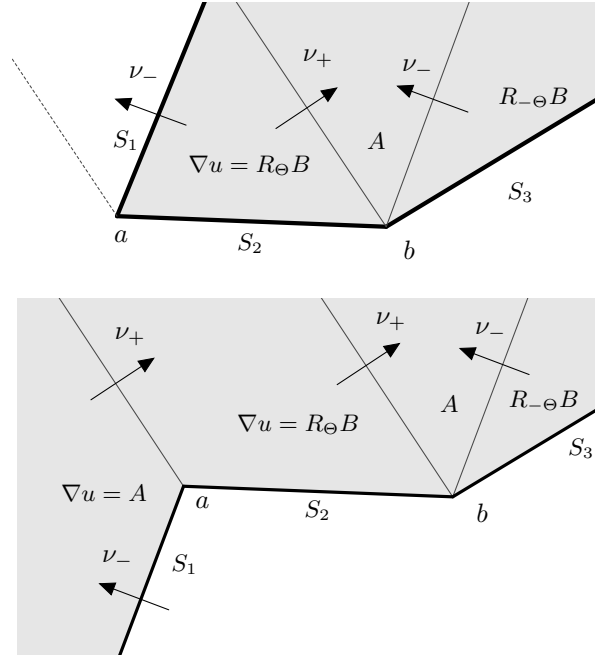


FIGURE 9.10 – Le fait que S_1 est orthogonal à ν_- contredit soit le fait que a est un sommet simple (en haut), soit la convexité de Ω (en bas).

On a ainsi définitivement prouvé qu'admettre l'existence d'une solution de (9.3) est absurde. \square

Remarque 9.15. Le résultat est probablement vrai pour les domaines non-bornés et non-convexes, cependant la preuve deviendrait beaucoup plus difficile, car il faudrait admettre la possibilité que les sommets de $\partial\Omega$ soient atteints par au plus *quatre* lignes de discontinuité.

9.3 Cas particuliers

Nous étudions ici l'existence de solutions affines par morceaux au problème des deux-puits dans des domaines dont la géométrie particulière n'entre pas dans le cadre du théorème 9.13, c'est-à-dire des domaines non-bornés dont le bord n'est constitué que de morceaux ayant au plus deux directions distinctes.

9.3.1 Analyse dans un demi-plan

Il est trivialement possible de construire une solution affine sur un demi-plan. Il est également possible de construire une solution affine par morceaux, pour peu que les lignes de discontinuité (formant nécessairement une lamination simple) soient parallèles au bord du demi-plan et, dans ce cas, le gradient reste dans le même puits tout le long de $\partial\Omega$. Il est intéressant de faire ici un lien entre le problème de Dirichlet dans un demi-plan et

l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits (voir définition 9.39), qui joue un rôle central dans l'existence de solutions pour des inclusions différentielles (voir [10], chapitre 10 et [15]). Plus précisément, nous allons construire une condition de bord $C \in \text{int R co}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B)$ pour laquelle le problème de Dirichlet admet une solution affine sur un demi-plan. Pour $a \in \mathbb{R}$, nous notons les droites

$$D_a := \{t(1, a) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_\infty := \{0\} \times \mathbb{R} = \{t(0, 1) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Théorème 9.16. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) \cdot \det(B) > 0$, $\det(A) \neq \det(B)$,

$$0 < \lambda_1(BA^{-1}) < 1 < \lambda_2(BA^{-1}) \quad \text{et} \quad \lambda_1(BA^{-1}) \cdot \lambda_2(BA^{-1}) \neq 1.$$

Soit $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors pour tout $M \in E$, il existe une matrice $C \in \text{int R co}(E)$ et une pente $a > 0$ telles que

$$Mx = Cx \quad \text{sur } D_a.$$

Remarque 9.17.

- (i) Le théorème est faux pour le cas orthogonal $A = I_2$, $B = I_2^- = \text{diag}(-1, 1)$ (voir section 9.4).
- (ii) Il faut faire attention au fait que le théorème 9.16 ne garantit pas l'existence de données de bord admissible $C \in \text{int R co}(E)$ pour n'importe quelle droite a . En particulier, les droites horizontales et verticales ne donnent aucune matrice C , quelles que soient les valeurs $0 < \lambda < 1 < \mu$ (voir exemples 9.20 et 9.21)

Démonstration. En quatre étapes.

Etape 1. Sans perte de généralité, nous pouvons nous réduire à $A = I_2$, $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$ avec

$$\lambda = \text{sgn}(\det(BA^{-1}))\lambda_1(BA^{-1}), \quad \mu = \lambda_2(BA^{-1}).$$

Par hypothèse, nous avons les inégalités

$$0 < \lambda < 1 < \mu \quad \text{et} \quad \lambda\mu \neq 1. \tag{9.5}$$

De plus, puisque $\text{int R co}(E)$ est invariant par rotation à gauche, il suffit de traiter $M \in \{A, B\}$.

Etape 2. Rappelons la formule de Sverak (théorème 9.41) pour l'enveloppe rang-1 convexe de E :

$$\text{int R co}(E) = \left\{ C = \sigma R_\varphi A + \tau R_\psi B : 0 < \sigma < \frac{\lambda\mu - \det(C)}{\lambda\mu - 1}, \quad 0 < \tau < \frac{\det(C) - 1}{\lambda\mu - 1} \right\}.$$

Nous voulons pouvoir exprimer une matrice quelconque comme une combinaison linéaire de rotations de A et B . Pour tout $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire $C = \sigma R_\varphi A + \tau R_\psi B$. En effet, si on pose

$$c_1 = \sigma \cos(\varphi) + \tau \lambda \cos(\psi), \quad c_2 = \sigma \sin(\varphi) + \tau \lambda \sin(\psi),$$

$$c_3 = -(\sigma \sin(\varphi) + \tau \mu \sin(\psi)), \quad c_4 = \sigma \cos(\varphi) + \tau \mu \cos(\psi),$$

nous obtenons facilement

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\mu c_1 - \lambda c_4)^2 + (\mu c_2 + \lambda c_3)^2}}{\mu - \lambda}, \quad \tau = \frac{\sqrt{(c_1 - c_4)^2 + (c_2 + c_3)^2}}{\mu - \lambda}. \quad (9.6)$$

Etape 3. Montrons le théorème pour $M = A = I_2$. L'équation $Ax = Cx$ sur la droite D_a s'écrit

$$t(1, a) = A \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = t(c_1 + ac_3, c_2 + ac_4), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

autrement dit

$$c_1 + ac_3 = 1, \quad c_2 + ac_4 = a.$$

Par conséquent, C est nécessairement de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 1 - ac & c \\ a(1 - d) & d \end{pmatrix}, \quad \det(C) = d - ac,$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ sont variables. Choisissons la valeur

$$d := ac + \frac{1 + \lambda\mu}{2},$$

ce qui donne

$$C = \begin{pmatrix} 1 - ac & c \\ a \left(\frac{1 - \lambda\mu}{2} - ac \right) & ac + \frac{1 + \lambda\mu}{2} \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \frac{1 + \lambda\mu}{2},$$

d'où, par l'étape 2, nous avons

$$\sigma(\mu - \lambda) = \sqrt{\left(\lambda c + a\mu \left(\frac{1 - \lambda\mu}{2} - ac \right) \right)^2 + \left(\mu(1 - ac) - \lambda \left(\frac{1 + \lambda\mu}{2} + ac \right) \right)^2},$$

$$\tau(\mu - \lambda) = \sqrt{\left(\frac{1 - \lambda\mu}{2} - 2ac \right)^2 + \left(a \frac{1 - \lambda\mu}{2} + c(1 - a^2) \right)^2}.$$

Par définition, pour avoir $C \in \text{int } \mathbb{R} \text{ co}(E)$, il faut trouver $a = a(\lambda, \mu), c = c(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma < \frac{\lambda\mu - \det(C)}{\lambda\mu - 1} = 1/2, \quad \tau < \frac{\det(C) - 1}{\lambda\mu - 1} = 1/2.$$

Choisissons ensuite

$$a := \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + \mu} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\mu^2 - 1}}$$

et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$c = c(t) := \frac{a(1 - \lambda\mu) + t\sqrt{(1 - \lambda^2)(\mu^2 - 1)}}{2(1 + a^2)}.$$

Commençons par vérifier que $\tau < 1/2$. En plongeant les valeurs choisies de a et c , nous trouvons

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sqrt{(1-\lambda\mu)^2 + t^2(\mu^2-1)(1-\lambda^2)}}{2(\mu-\lambda)} \\ &= \frac{\sqrt{(\mu-\lambda)^2 + (t^2-1)(\mu^2-1)(1-\lambda^2)}}{2(\mu-\lambda)}.\end{aligned}$$

Puisque $\tau > 0$ et $0 < \lambda < 1 < \mu$, nous avons la suite d'équivalences

$$\begin{aligned}0 < \tau < 1/2 &\Leftrightarrow \tau^2 < 1/4 \\ &\Leftrightarrow (\mu-\lambda)^2 + (t^2-1)(\mu^2-1)(1-\lambda^2) < (\mu-\lambda)^2 \\ &\Leftrightarrow (t^2-1)(\mu^2-1)(1-\lambda^2) < 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow |t| < 1.\end{aligned}$$

Et donc,

$$\tau(a, c(t)) < 1/2, \quad \forall |t| < 1. \quad (9.7)$$

Vérifions maintenant $\sigma < 1/2$, avec $t = 1$. Nous obtenons

$$\sigma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\lambda + \lambda^3 + 4\mu + 11\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 3\lambda^3\mu^2 + \lambda^2\mu^3}{5\lambda + 4\lambda^3 + 3\mu + 12\lambda^2\mu + 7\lambda\mu^2 + \mu^3}}.$$

Puisque $\sigma > 0$ et $0 < \lambda < 1 < \mu$, nous avons la suite d'équivalences

$$\begin{aligned}0 < \sigma < 1/2 &\Leftrightarrow \sigma^2 < 1/4 \\ &\Leftrightarrow \frac{8\lambda + \lambda^3 + 4\mu + 11\lambda^2\mu + 4\lambda\mu^2 + 3\lambda^3\mu^2 + \lambda^2\mu^3}{5\lambda + 4\lambda^3 + 3\mu + 12\lambda^2\mu + 7\lambda\mu^2 + \mu^3} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1) \underbrace{\frac{(3\lambda + \mu)(\mu^2 - 1)}{5\lambda + 4\lambda^3 + 3\mu + 12\lambda^2\mu + 7\lambda\mu^2 + \mu^3}}_{>0} < 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \lambda < 1.\end{aligned}$$

Et donc,

$$\sigma(a, c(t)) < 1/2, \quad \text{si } t = 1.$$

Il est évident que l'application $t \mapsto \sigma(a, c(t))$ est continue dans un voisinage de $t = 1$. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\sigma(a, c(t)) < 1/2, \quad \text{si } 1 - \varepsilon < t \leq 1. \quad (9.8)$$

Grace aux inégalités (9.7) et (9.8) nous avons la conclusion.

Etape 4. Montrons le résultat pour $M = B = \text{diag}(\lambda, \mu)$. La démarche est identique à celle de l'étape 3, mais nous la montrons en détail ici. L'équation $Bx = Cx$ sur D_a s'écrit

$$t(\lambda, a\mu) = B \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = t(c_1 + ac_3, c_2 + ac_4), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

autrement dit

$$c_1 + ac_3 = \lambda, \quad c_2 + ac_4 = a\mu.$$

Par conséquent, C est nécessairement de la forme

$$C = \begin{pmatrix} \lambda - ac & c \\ a(\mu - d) & d \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \lambda d - a\mu c,$$

où $c, d \in \mathbb{R}$ sont variables. Nous choisissons d'abord

$$d := \frac{2ac\mu + \lambda\mu + 1}{2\lambda},$$

ce qui donne

$$C = \begin{pmatrix} \lambda - ac & c \\ \frac{a(\lambda\mu - 1 - 2ac\mu)}{2\lambda} & \frac{2ac\mu + \lambda\mu + 1}{2\lambda} \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \frac{1 + \lambda\mu}{2}.$$

Par définition, pour avoir $C \in \text{int } \mathbb{R} \text{ co}(E)$, il faut trouver $a = a(\lambda, \mu), c = c(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sigma < \frac{\lambda\mu - \det(C)}{\lambda\mu - 1} = 1/2, \quad \tau < \frac{\det(C) - 1}{\lambda\mu - 1} = 1/2.$$

Choisissons ensuite

$$a := \frac{2(\lambda + \mu)}{3\lambda + \mu} \sqrt{\frac{1 - \lambda^2}{\mu^2 - 1}}$$

et, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$c = c(t) := \frac{a\mu(\lambda\mu - 1) - t\lambda\sqrt{(1 - \lambda^2)(\mu^2 - 1)}}{2(\lambda^2 + a^2\mu^2)}.$$

Par l'étape 2, nous obtenons, en plongeant les valeurs précédentes, nous obtenons, d'une part,

$$\sigma = \frac{\sqrt{(\mu - \lambda)^2 + (t^2 - 1)(\mu^2 - 1)(1 - \lambda^2)}}{2(\mu - \lambda)}.$$

On remarque que σ est ici le même que le τ de l'étape 3, ce qui nous donne directement

$$\sigma(a, c(t)) < 1/2, \quad \forall |t| < 1. \quad (9.9)$$

Vérifions maintenant $\tau < 1/2$, avec $t = 1$. Nous obtenons

$$\tau = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda + 11\lambda\mu^2 + 4\lambda^3\mu^2 + \mu(3 + \mu^2) + 4\lambda^2(\mu + 2\mu^3)}{12\lambda\mu^2 + 4\mu^3 + \lambda^3(1 + 3\mu^2) + \lambda^2\mu(7 + 5\mu^2)}}$$

Puisque $\tau > 0$ et $0 < \lambda < 1 < \mu$, nous avons la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} 0 < \tau < 1/2 &\Leftrightarrow \tau^2 < 1/4 \\ &\Leftrightarrow \frac{\lambda + 11\lambda\mu^2 + 4\lambda^3\mu^2 + \mu(3 + \mu^2) + 4\lambda^2(\mu + 2\mu^3)}{12\lambda\mu^2 + 4\mu^3 + \lambda^3(1 + 3\mu^2) + \lambda^2\mu(7 + 5\mu^2)} < 1 \\ &\Leftrightarrow (\lambda^2 - 1) \underbrace{\frac{(\lambda + 3\mu)(\mu^2 - 1)}{12\lambda\mu^2 + 4\mu^3 + \lambda^3(1 + 3\mu^2) + \lambda^2\mu(7 + 5\mu^2)}}_{>0} < 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda^2 - 1 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \lambda < 1. \end{aligned}$$

Et donc,

$$\tau(a, c(t)) < 1/2, \quad \text{si } t = 1.$$

Il est évident que l'application $t \mapsto \tau(a, c(t))$ est continue dans un voisinage de $t = 1$. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\tau(a, c(t)) < 1/2, \quad \text{si } 1 - \varepsilon < t \leq 1. \quad (9.10)$$

Grace aux inégalités (9.9) et (9.10) nous avons la conclusion. \square

Voici quelques exemples numériques du théorème précédent. Nous utiliserons constamment les matrices $A = I_2$, $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$.

Exemple 9.18. Soient $\lambda = 1/2$ et $\mu = 4$. Choisissons également $a = 1/2$. Une matrice $C \in \text{int R co}(E)$ satisfaisant $x = Cx$ sur D_a est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 9/20 & 11/10 \\ -21/40 & 41/20 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \frac{3}{2}.$$

En effet, nous avons par (9.6)

$$\sigma = \frac{31}{28\sqrt{5}} \approx 0.495 < \frac{1}{2} = \frac{\lambda\mu - \det(C)}{\lambda\mu - 1}, \quad \tau = \frac{\sqrt{185}}{28} \approx 0.485 < \frac{1}{2} = \frac{\det(C) - 1}{\lambda\mu - 1}.$$

Exemple 9.19. Soient $\lambda = 1/2$ et $\mu = 4$. Choisissons également $a = 1/5$. Une matrice $C \in \text{int R co}(E)$ satisfaisant $Bx = Cx$ sur D_a est donnée par

$$C = \begin{pmatrix} 59/100 & -9/20 \\ 43/125 & 57/25 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = \frac{3}{2}.$$

En effet, nous avons par (9.6)

$$\sigma = \frac{\sqrt{2813201}}{3500} \approx 0.48 < \frac{1}{2} = \frac{\lambda\mu - \det(C)}{\lambda\mu - 1}, \quad \tau = \frac{\sqrt{358417}}{\sqrt{2875}} \approx 0.48 < \frac{1}{2} = \frac{\det(C) - 1}{\lambda\mu - 1}.$$

Exemple 9.20. Montrons qu'il n'existe pas de matrice $C \in \text{int R co}(E)$ telle que

$$I_2 x = Cx \quad \text{sur } D_0 = \mathbb{R} \times \{0\}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & d \end{pmatrix}, \quad \det(C) = d.$$

Supposons par l'absurde que $C \in \text{int R co}(E)$ pour certains $c, d \in \mathbb{R}$. Alors on doit avoir les inégalités

$$0 < \sigma = \frac{\sqrt{(\mu - \lambda d)^2 + \lambda c^2}}{\mu - \lambda} < \frac{\lambda\mu - d}{\lambda\mu - 1}, \quad (9.11)$$

$$0 < \tau = \frac{\sqrt{(1 - d)^2 + c^2}}{\mu - \lambda} < \frac{d - 1}{\lambda\mu - 1}. \quad (9.12)$$

En partant de la première inégalité, nous obtenons la suite d'implications

$$\begin{aligned} \frac{\mu - \lambda d}{\mu - \lambda} < \frac{\lambda\mu - d}{\lambda\mu - 1} &\Rightarrow \frac{(\mu - \lambda d)(\lambda\mu - 1) - (\lambda\mu - d)(\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)(\lambda\mu - 1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{\mu d - \mu + \lambda^2\mu - \lambda^2\mu d}{(\mu - \lambda)(\lambda\mu - 1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{\mu(1 - \lambda^2)}{\mu - \lambda} \frac{d - 1}{\lambda\mu - 1} < 0. \end{aligned}$$

Or, cette dernière inégalité est contredite par (9.5) et (9.12), qui impliquent que

$$\frac{\mu(1 - \lambda^2)}{\mu - \lambda} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d - 1}{\lambda\mu - 1} > 0.$$

Par conséquent, il n'existe pas de $C \in \text{int R co}(E)$.

Exemple 9.21. Montrons qu'il n'existe pas de matrice $C \in \text{int R co}(E)$ telle que

$$I_2 x = Cx \quad \text{sur } D_\infty = \{0\} \times \mathbb{R}.$$

Dans ce cas, on a nécessairement

$$C = \begin{pmatrix} c & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = c.$$

Supposons par l'absurde que $C \in \text{int R co}(E)$ pour certains $c, d \in \mathbb{R}$. Alors on doit avoir les inégalités

$$0 < \sigma = \frac{\sqrt{(\mu c - \lambda)^2 + \lambda d^2}}{\mu - \lambda} < \frac{\lambda\mu - c}{\lambda\mu - 1}, \quad (9.13)$$

$$0 < \tau = \frac{\sqrt{(c - 1)^2 + d^2}}{\mu - \lambda} < \frac{c - 1}{\lambda\mu - 1}. \quad (9.14)$$

En partant de la première inégalité, nous obtenons la suite d'implications

$$\begin{aligned} \frac{\mu c - \lambda}{\mu - \lambda} < \frac{c - \lambda\mu}{1 - \lambda\mu} &\Rightarrow \frac{(\mu c - \lambda)(1 - \lambda\mu) - (c - \lambda\mu)(\mu - \lambda)}{(\mu - \lambda)(1 - \lambda\mu)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{\lambda c - \lambda + \lambda\mu^2 - \lambda\mu^2 c}{(\mu - \lambda)(\lambda\mu - 1)} < 0 \\ &\Rightarrow \frac{\lambda(\mu^2 - 1)}{\mu - \lambda} \frac{c - 1}{\lambda\mu - 1} < 0. \end{aligned}$$

Or, cette dernière inégalité est contredite par (9.5) et (9.14), qui impliquent que

$$\frac{\lambda(\mu^2 - 1)}{\mu - \lambda} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{c - 1}{\lambda\mu - 1} > 0.$$

9.3.2 Analyse dans un angle de plan

Dans un angle de plan, c'est-à-dire un domaine délimité par deux demi-droites, la situation est un peu plus riche, car, hormis les cas triviaux où l'angle est dégénéré ou plat,

il est possible de construire plusieurs solutions affines par morceaux satisfaisant l'inclusion différentielle

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$$

selon le nombre de lignes de discontinuité pouvant atteindre le sommet de l'angle (au plus quatre). Le résultat suivant montre qu'une solution affine quelconque sur un angle de plan ne peut admettre qu'une unique condition de bord. Pour $a \in \mathbb{R}$, nous notons les droites

$$D_a := \{t(1, a) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_\infty := \{0\} \times \mathbb{R} = \{t(0, 1) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 9.22. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tels que $\alpha \neq \beta$. Alors il existe une unique matrice $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que

$$\begin{cases} Ax = Cx & \text{sur } D_\alpha, \\ Bx = Cx & \text{sur } D_\beta. \end{cases}$$

Démonstration. Notons

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_2 & a_4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_2 & b_4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & c_3 \\ c_2 & c_4 \end{pmatrix}.$$

En développant les équations

$$\begin{cases} Ax = Cx & \text{sur } D_\alpha, \\ Bx = Cx & \text{sur } D_\beta, \end{cases}$$

nous allons montrer que C est uniquement déterminé par A, B, α et β . Il y a deux cas à voir

Cas 1. Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} a_1 + \alpha a_3 &= c_1 + \alpha c_3, & a_2 + \alpha a_4 &= c_2 + \alpha c_4, \\ b_1 + \beta b_3 &= c_1 + \beta c_3, & b_2 + \beta b_4 &= c_2 + \beta c_4, \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)c_1 &= \alpha b_1 - \beta a_1 + \alpha\beta(b_3 - a_3), \\ (\alpha - \beta)c_2 &= \alpha b_2 - \beta a_2 + \alpha\beta(b_4 - a_4), \\ (\alpha - \beta)c_3 &= a_1 - b_1 + \alpha a_3 - \beta b_3, \\ (\alpha - \beta)c_4 &= a_2 - b_2 + \alpha a_4 - \beta b_4, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$C = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha b_1 - \beta a_1 + \alpha\beta(b_3 - a_3) & a_1 - b_1 + \alpha a_3 - \beta b_3 \\ \alpha b_2 - \beta a_2 + \alpha\beta(b_4 - a_4) & a_2 - b_2 + \alpha a_4 - \beta b_4 \end{pmatrix}.$$

Cas 2. Si $\alpha = \infty, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ \beta \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} a_3 &= c_3, & a_4 &= c_4, \\ b_1 + \beta b_3 &= c_1 + \beta c_3, & b_2 + \beta b_4 &= c_2 + \beta c_4, \end{aligned}$$

ce qui donne directement

$$C = \begin{pmatrix} b_1 + \beta(b_3 - a_3) & a_3 \\ b_2 + \beta(b_4 - a_4) & a_4 \end{pmatrix}.$$

□

Un corollaire immédiat est l'existence d'une unique condition de bord admissible pour le problème de Dirichlet dans un angle de plan.

Théorème 9.23. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversibles et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un angle de plan ouvert non dégénéré. Soit $u \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ satisfaisant l'inclusion différentielle

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors il existe une unique matrice $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que

$$u(x) = Cx \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Exemple 9.24. Soient $A = I_2$ et $B = \text{diag}(\lambda, \mu)$ avec $0 < |\lambda| < 1 < \mu$. Soit

$$p := \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

On rappelle que $\det(A - R_{\pm\Theta}B) = 0$, avec

$$\cos(\Theta) = \frac{1 + \lambda\mu}{\lambda + \mu}, \quad \sin(\Theta) = \frac{\sqrt{1 - \lambda^2}\sqrt{\mu^2 - 1}}{\lambda + \mu},$$

et

$$Ax = R_{\pm\Theta}Bx, \quad \forall x \in D_{\mp p}.$$

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha < -p$ et $p < \beta$. Soit l'angle de plan

$$\Omega_{\alpha, \beta} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \beta x_1 < x_2 < \alpha x_1\}.$$

Soient les applications $u_1, u_2 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}_{\alpha, \beta}; \mathbb{R}^2)$ définies par

$$\begin{aligned} u_1(x) &:= \begin{cases} Ax & : \alpha x_1 < x_2 < -px_1 \\ R_{\Theta}Bx & : -px_1 < x_2 < \beta x_1, \end{cases} \\ u_2(x) &:= \begin{cases} Ax & : \alpha x_1 < x_2 < -px_1 \\ R_{\Theta}Bx & : -px_1 < x_2 < px_1 \\ R_{2\Theta}Ax & : px_1 < x_2 < \beta x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Alors ces applications sont solutions du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u_i \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega_{\alpha,\beta} \\ u_i(x) = C_i x & \text{sur } \partial\Omega_{\alpha,\beta}, \end{cases}$$

où

$$C_1 = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha\lambda \cos(\Theta) - \beta - \alpha\beta\mu \sin(\Theta) & 1 - \lambda \cos(\Theta) + \beta\mu \sin(\Theta) \\ \alpha\lambda \sin(\Theta) + \alpha\beta(\mu \cos(\Theta) - 1) & -\lambda \sin(\Theta) + \alpha - \beta\mu \cos(\Theta) \end{pmatrix},$$

et

$$C_2 = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} \alpha \cos(2\Theta) - \beta(\alpha \sin(2\Theta) + 1) & 1 - \cos(2\Theta) + \beta \sin(2\Theta) \\ \alpha(\beta(\cos(2\Theta) - 1) + \sin(\Theta)) & -\sin(2\Theta) + \alpha - \beta \cos(2\Theta) \end{pmatrix}.$$

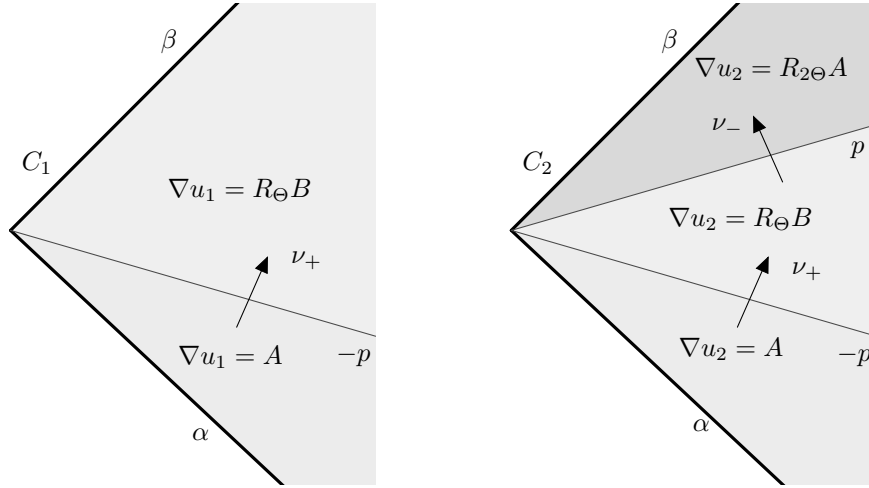


FIGURE 9.11 – Deux solutions affines par morceaux sur le même angle de plan avec une lamination simple (à gauche) et une lamination double (à droite).

Remarque 9.25. On peut faire un développement similaire pour le cas orthogonal $A = I_2$, $B = I_2^- = \text{diag}(-1, 1)$. Il suffit de remarquer que pour tout $\varphi \in]-\pi, \pi]$,

$$\det(A - R_\varphi B) = 0$$

et

$$Ax = R_\varphi Bx \Leftrightarrow (1 + \cos(\varphi))x_1 + \sin(\varphi)x_2 = 0.$$

9.3.3 Un domaine non-convexe

Nous présentons un exemple de domaine polygonal non-borné et non-convexe admettant une solution affine par morceaux non triviale.

Exemple 9.26. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, soit l'ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ défini par (voir figure 9.12)

$$\Omega_{2k} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2k \leq x_1 \leq 2k + 1, x_2 > k/4\},$$

$$\Omega_{2k-1} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2k-1 \leq x_1 \leq 2k, x_2 > (x_1 - k)/4\},$$

$$\Omega := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k.$$

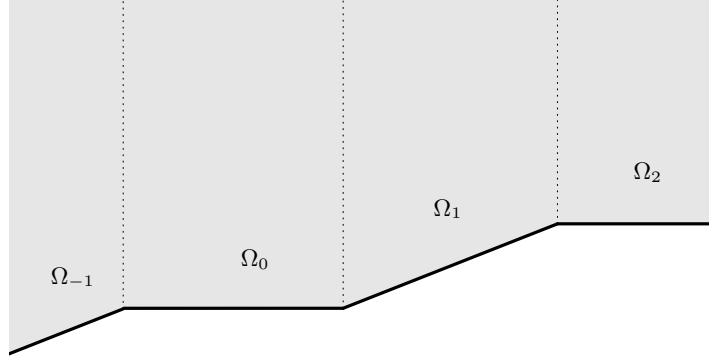


FIGURE 9.12 – Un domaine polygonal non-borné, non-convexe et dont les côtés n'ont que deux directions distinctes.

Soient $A := I_2$, $B := \text{diag}(-1/2, 2)$ et

$$R_{\pi/2}B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Soit

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u(x) \in \{\pm A, \pm R_{\pi/2}B\} \subset \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

admet une solution affine par morceaux représentée sur la figure 9.13. En effet, le choix de $\lambda = -1/2$ et $\mu = 2$ implique que la lamination est double, admet des sommets internes (car $\lambda\mu = -1$) et des lignes de discontinuités orthogonales aux vecteurs

$$\nu_{\pm} = \left(\pm\sqrt{1-\lambda^2}, \sqrt{\mu^2-1} \right) = \sqrt{3}(\pm 1/2, 1)$$

partant des sommets de $\partial\Omega$ et partitionnant Ω en cellules. En choisissant $\nabla u(x) \in \{\pm A, \pm R_{\pi/2}B\}$ sur une des ces cellules, alors u peut être étendue continuellement sur les autres cellules de Ω , comme dans le lemme 9.7.

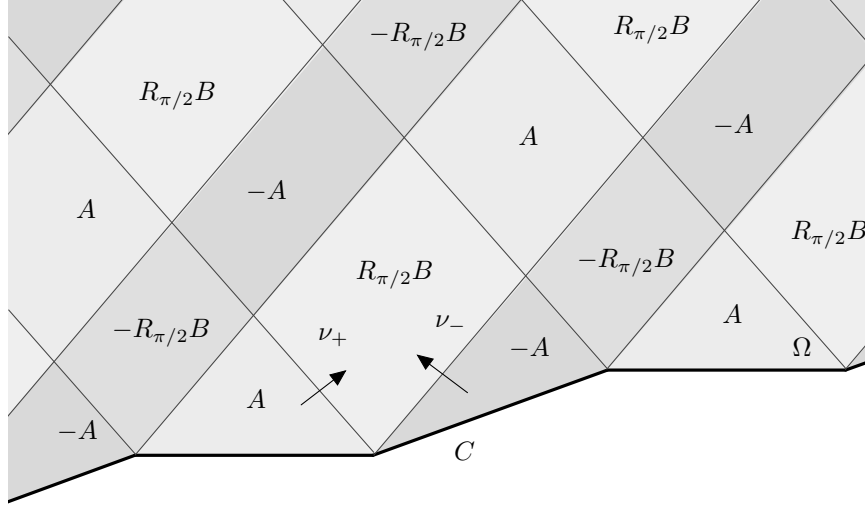


FIGURE 9.13 – Une solution affine par morceaux dans un domaine non-borné et non-convexe

Vérifions la condition de Dirichlet. Nous avons $\partial\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} D_k$, avec

$$D_{2k} := \{(x_1, k/4) \in \mathbb{R}^2 : 2k \leq x_1 \leq 2k+1\} \subset \partial\Omega_{2k},$$

$$D_{2k-1} := \{(x_1, (x_1 - k)/4) \in \mathbb{R}^2 : 2k-1 \leq x_1 \leq 2k\} \subset \partial\Omega_{2k-1}.$$

En particulier, notre construction de u implique

$$u(x) = \begin{cases} x - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} & : x \in D_{2k}, \\ -x + k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & : x \in D_{2k+1}. \end{cases}$$

D'une part, pour $x = (x_1, k/4) \in D_{2k}$,

$$Cx = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ k/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2k \\ -k/4 \end{pmatrix},$$

$$u(x) = - \begin{pmatrix} x_1 \\ k/4 \end{pmatrix} - k \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2k \\ -k/4 \end{pmatrix}.$$

D'autre part, pour $x = (x_1, (x_1 - k)/4) \in D_{2k+1}$,

$$Cx = \begin{pmatrix} 1 & -8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 - k)/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k - x_1 \\ (k - x_1)/4 \end{pmatrix},$$

$$u(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ (x_1 - k)/4 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k - x_1 \\ (k - x_1)/4 \end{pmatrix},$$

d'où $u(x) = C(x)$ sur $\partial\Omega$.

9.4 Le cas orthogonal

Dans cette section, nous discutons du cas orthogonal, où $A = I_2$ et $B = I_2^- = \text{diag}(1, -1)$. Dans ce cas, les deux puits forment le groupe des matrices orthogonales

$$\begin{aligned} O(2) &:= \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} : CC^T = C^T C = I_2\} \\ &= \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} : \lambda_1(C) = \lambda_2(C) = 1\}. \end{aligned}$$

L'inclusion différentielle

$$\begin{cases} \nabla u \in O(2) & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (9.15)$$

a d'abord été étudié pour la dimension 3 par Cellina-Perrotta [8] qui ont construit une solution localement affines par morceaux si $u_0 \equiv 0$, puis par Dacorogna-Marcellini-Paolini qui ont également donné des solutions explicites pour les dimensions 2 et 3 ([16], [17]), puis pour la dimension $n \geq 2$ ([18]). Citons également Iwaniec-Verchota-Vogel [38].

Exemple 9.27. Voici un argument pour le cas $n = 2$ et $u_0 \equiv 0$, montrant par l'absurde qu'il est impossible d'avoir une solutions régulière jusqu'au bord. Soit $u \in C^1(\overline{O}, \mathbb{R}^2)$, où O est un voisinage de $\partial\Omega$, telle que

$$\nabla u \in O(2) \quad \text{dans } \overline{O},$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda_1(\nabla u) = \lambda_2(\nabla u) = 1.$$

Or,

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = |\nabla u|^2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \lambda_2 = |\det(\nabla u)|,$$

d'où

$$|\nabla u|^2 = 2 |\det(\nabla u)| = 2.$$

En notant $u(x) = (u^1(x), u^2(x))$, $x = (x_1, x_2)$ et

$$\nabla u = \begin{pmatrix} u_{x_1}^1 & u_{x_2}^1 \\ u_{x_1}^2 & u_{x_2}^2 \end{pmatrix},$$

nous avons le système

$$\begin{cases} u_{x_1}^1 - u_{x_2}^2 = 0 \\ u_{x_1}^2 + u_{x_2}^1 = 0 \\ |\nabla u^1| = |\nabla u^2| = 1.0 \end{cases} \quad \text{dans } \overline{O}$$

En particulier, dans $\overline{O} \cap \partial\Omega$, nous avons

$$\begin{cases} \langle \nabla u^1; \tau \rangle = \langle \nabla u^2; \nu \rangle \\ \langle \nabla u^2; \tau \rangle = \langle \nabla u^1; \nu \rangle, \end{cases}$$

où τ et ν sont, à un signe près, respectivement le vecteur tangent et normal à $\partial\Omega$. Puisque $u^1 = u^2 = 0$ sur $\partial\Omega$, nous devons alors avoir $\nabla u^1 = \nabla u^2 = 0$ sur $\overline{O} \cap \partial\Omega$, ce qui contredit le fait que $|\nabla u^1| = |\nabla u^2| = 1$ dans \overline{O} . Ainsi, une solution lipschitzienne de (9.15) ne peut être régulière jusqu'au bord. En particulier, elle ne peut pas être affine avec un nombre fini de morceaux.

Le résultat suivant montre l'existence de solutions pour des conditions de bord affines non-nulles dans un rectangle.

Théorème 9.28. Soient $\Omega :=]-a, a[\times]-b, b[$ et $u_0(x_1, x_2) := (\alpha x_1, \beta x_2)$ où $a, b > 0$, $0 < \alpha, \beta < 1$ satisfont

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{1 - \alpha^2}{1 - \beta^2}.$$

Alors il existe une solution $\text{loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in O(2) & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Voir Dacorogna-Marcellini-Paolini [17], théorème 5.3. □

Evidemment, il est possible de trouver des solutions du problème de Dirichlet dans un demi-plan ou un angle de plan en faisant une analyse similaire à la section précédente pour obtenir des conditions de bord admissibles. Nous allons cependant montrer que, contrairement au cas non-orthogonal, il n'existe pas de solution affine pour laquelle une condition de bord appartient à l'intérieur de l'enveloppe rang-1 convexe. Pour $a \in \mathbb{R}$, nous notons les droites

$$D_a := \{t(1, a) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}, \quad D_\infty := \{0\} \times \mathbb{R} = \{t(0, 1) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}.$$

Proposition 9.29. Pour tout $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et pour tout $M \in O(2)$, il n'existe aucune matrice $C \in \text{int R co}(E)$ telle que $Mx = Cx$ sur D_a .

Démonstration. Sans perte de généralité, puisque tout les ensembles impliqués sont invariant par rotation, nous pouvons choisir $M = \text{diag}(1, s)$, $s = \pm 1$. Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \in \text{int R co}(E)$ tel que $Mx = Cx$ sur D_a , pour un certain $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Etape 1. Par le théorème 9.42,

$$\text{int R co}(E) = \{C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \lambda_i(C) < 1, \ i = 1, 2\}.$$

Par conséquent,

$$\lambda_2(C) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{|C|^2 + 2|\det(C)|} + \sqrt{|C|^2 - 2|\det(C)|} \right) < 1,$$

ce qui implique, après avoir élevé cette inégalité au carré et arrangé les termes,

$$\sqrt{|C|^4 - 4\det(C)^2} < 2 - |C|^2.$$

En élevant encore une fois au carré, nous avons la condition nécessaire

$$|C|^2 - \det(C)^2 - 1 < 0. \tag{9.16}$$

Etape 2. Il y a deux cas à voir.

Cas 1. Si $a \neq \infty$, et $x = t(1, a) \in D_a$. Alors l'égalité $Mx = Cx$ s'écrit

$$t(1, sa) = M \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t \\ at \end{pmatrix} = t(c_1 + ac_2, c_3 + ac_4), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

autrement dit

$$c_1 + ac_2 = 1, \quad c_3 + ac_4 = sa.$$

Ainsi C est de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 1 - a\alpha_1 & \alpha_1 \\ a(s - \alpha_2) & \alpha_2 \end{pmatrix},$$

avec

$$\det(C) = \alpha_2 - sa\alpha_1, \quad |C|^2 = (1 + a^2)(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2a\alpha_1 - 2sa\alpha_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} |C|^2 - \det(C)^2 - 1 &= (1 + a^2)(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - 2a\alpha_1 - 2sa^2\alpha_2 \\ &\quad - (\alpha_2^2 + a^2\alpha_1^2 - 2sa\alpha_1\alpha_2) \\ &= \alpha_1^2 + a^2\alpha_2^2 + a^2 - 2sa^2\alpha_2 - 2sa\alpha_1\alpha_2 \\ &= (\alpha_1 + sa\alpha_2 - a)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

ce qui contredit (9.16).

Cas 2. Si $a = \infty$, c'est-à-dire D_∞ est la droite verticale $\{(0, t) \in \mathbb{R}^2\}$, alors l'égalité $Mx = Cx$ s'écrit

$$t(0, s) = M \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = t(c_2, c_4), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

autrement dit

$$c_2 = 0, \quad c_4 = s.$$

Ainsi C est de la forme

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ \alpha_2 & s \end{pmatrix}, \det(C) = s\alpha_1$$

d'où

$$|C|^2 - \det(C)^2 - 1 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + s^2 - s^2\alpha_1^2 - 1 = \alpha_2^2 \geq 0,$$

ce qui contredit également (9.16). □

Un corollaire immédiat de ce résultat est la non-existence de solution affine par morceaux pour des conditions de bord appartenant à $\text{int R co}(E)$, dans le cas orthogonal.

Théorème 9.30. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $C \in \text{int R co}(O(2))$. Alors il n'existe pas de solution $u \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in O(2) & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

9.5 Solutions lipschitziennes

Dans cette section, nous énonçons les principaux résultats connus concernant l'existence de solutions lipschitziennes au problème des deux puits. Nous commençons par énoncer un résultat général d'inclusion différentielle pour le cas scalaire ($u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) qui donne une condition nécessaire et suffisante.

Théorème 9.31 (Le cas scalaire). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné, $E \subset \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega})$. Alors le problème

$$\begin{cases} \nabla u \in E & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$ **si et seulement si**

$$\nabla u_0 \in E \cap \text{int co}(E),$$

où int co est l'intérieur de l'enveloppe convexe de E .

Démonstration. Voir [10], théorèmes 10.18 et 10.24. □

Remarque 9.32. (i) Ce résultat est obtenu via une construction « pyramidale » explicite de la solution u (voir Cellina [7] et Friesecke [31]). Cette construction sera rediscutée dans le chapitre 11.

(ii) Ce résultat a été établi par de nombreux auteurs, avec différents niveaux de généralité sur la condition de bord u_0 , en particulier, si u_0 est seulement lipschitzienne. Citons Bressan-Flores [2], Cellina [7], Dacorogna-Marcellini [12], [14], [15], De Blasi-Pigiani [27] et Friesecke [31].

Dans le cas vectoriel ($u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, avec $N, n \geq 2$), le problème est considérablement plus difficile et aucune condition suffisante et nécessaire n'a été trouvée pour l'existence. Une condition suffisante, impliquant l'enveloppe rang-1 convexe (voir section 9.6), a été établie par Dacorogna-Marcellini [12]-[15] suivant une méthode basée sur le théorème des catégories de Baire, et par Müller-Sverak [49], suivant la méthode dite d'intégration convexe de Gromov [35]. Nous énonçons ici le résultat spécifiquement appliqué au problème des deux puits.

Théorème 9.33. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ inversibles tels que $\det(A - B) = 0$. Soit $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tel que

$$C = \alpha R_a A + \beta R_b B,$$

où $R_a, R_b \in SO(2)$ et $0 < \alpha, \beta, \alpha + \beta < 1$. Alors il existe une solution $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $\det(B) > \det(A) > 0$ et

$$0 < \alpha < \frac{\det(B) - \det(C)}{\det(B) - \det(A)}, \quad 0 < \beta < \frac{\det(C) - \det(A)}{\det(B) - \det(A)}.$$

2. $\det(A) = \det(B) = \det(C)$.

Remarque 9.34.

(i) La caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe de $\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$ est due à Sverak [57] (voir aussi Dacorogna [10], théorème 7.44).

- (ii) Le premier cas a été montré par Dacorogna-Marcellini [13], [15] et Müller-Sverak [49], et le second cas a été montré par Dacorogna-Tanteri [26] et Müller-Sverak [50].

Enfin, voici le résultat d'existence pour le cas orthogonal.

Théorème 9.35. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et $u_0 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tel que pour tout $i = 1, \dots, n$,

$$\lambda_i(\nabla u_0) < 1, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors il existe une solution $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in O(n) & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque 9.36. Ce résultat peut se généraliser pour des inclusions différentielles de la forme

$$\nabla u \in \{\xi \in \mathbb{R}^{n \times n} : \lambda_i(\xi) = \gamma_i, \ i = 1, \dots, n\},$$

avec $0 < \gamma_1 \leq \dots \leq \gamma_n$ (dans le cas orthogonal, $\gamma_i = 1$). Voir Dacorogna-Ribeiro [24] et Dacorogna-Tanteri [25], [26].

9.6 Annexe : connexions de rang-1 et enveloppe rang-1 convexe

Nous montrons un résultat concernant les possibilités de rang-1 connexion entre les puits de deux matrices quelconques.

Proposition 9.37. Soient $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ telle que $\det(A) \neq 0$. Soit $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \setminus \{A\}$ rang-1 connecté à \mathbb{S}_A . Alors un seul des trois cas suivant est possible.

- (a) C est rang-1 connecté à un seul élément de \mathbb{S}_A ;
- (b) C est rang-1 connecté à exactement deux éléments de \mathbb{S}_A ;
- (c) C est rang-1 connecté à tous les éléments de \mathbb{S}_A .

Ce dernier cas se produit si et seulement si $C \in \mathbb{S}_{I_2^- A^{-1}}$.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $A = I_2$, quitte à remplacer C par CA^{-1} , et nous noterons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix}$$

Etape 1. Nous établissons le résultat préliminaire suivant : pour tout $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors l'équation

$$\alpha = F(\theta) := v_1 \cos(\theta) + v_2 \sin(\theta)$$

admet au plus deux solutions dans $] -\pi, \pi]$. En effet, si on pose

$$\cos(\lambda) := \frac{v_1}{|v|} \quad \text{et} \quad \sin(\lambda) := \frac{v_2}{|v|},$$

alors nous avons l'équation

$$\cos(\lambda - \theta) = \frac{\alpha}{|v|}$$

qui admet au plus deux solutions dans $] -\pi, \pi]$.

Etape 2. Soit $R_\varphi \in \mathbb{S}_A$ telle que $\det(C - R_\varphi) = 0$. Par conséquent, φ satisfait l'équation

$$(c_1 + c_4) \cos(\varphi) + (c_3 - c_2) \sin(\varphi) = 1 + \det(C). \quad (9.17)$$

Il y a deux cas à voir.

Cas 1. Si $c_1 + c_4 \neq 0$ ou si $c_3 - c_2 \neq 0$, alors par l'étape 1, l'équation (9.17) admet au plus deux solutions $\varphi_1, \varphi_2 \in] -\pi, \pi]$, ce qui correspond aux cas (a) et (b).

Cas 2. Si $c_1 + c_4 = c_3 - c_2 = 0$, alors (9.17) ne dépend plus de $\varphi \in] -\pi, \pi]$ et est équivalente à l'égalité

$$\det(C) = -(c_1^2 + c_2^2) = -1$$

qui est vraie si et seulement si $C \in \mathbb{S}_{I_2^-}$, ce qui correspond au cas (c). \square

Exemple 9.38. Soit $A = I_2$. Nous donnons trois exemples de matrices C pour chacun des trois cas possibles donnée par la proposition précédente :

$$C_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C_3 = I_2^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

En explicitant $\det(C_i - R_\varphi A)$, pour chacune des trois matrices, nous obtenons d'abord

$$\det(C_1 - R_\varphi A) = 3(1 - \cos(\varphi)),$$

d'où

$$\det(C_1 - R_\varphi A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

Ensuite,

$$\det(C_2 - R_\varphi A) = \sin(\varphi),$$

d'où

$$\det(C_2 - R_\varphi A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \{0, \pi\}.$$

Enfin, pour tout $\varphi \in] -\pi, \pi]$,

$$\det(C_3 - R_\varphi A) = (1 - \cos(\varphi))(-1 - \cos(\varphi)) + \sin(\varphi)^2 = -1 + \cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 0.$$

Nous définissons ici l'enveloppe rang-1 convexe d'un ensemble. Cette notion joue un rôle central dans l'existence de solutions lipschitziennes pour le problème des deux puits.

Définition 9.39 (Ensemble et enveloppe rang-1 convexe).

1. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ est *rang-1 convexe* si pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $\xi, \eta \in E$ tels que $\text{rg}(\eta - \xi) = 1$, alors

$$\lambda\xi + (1 - \lambda)\eta \in E.$$

2. Soit $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$. Soit la suite d'ensemble définie récursivement par

$$R_0 \text{ co}(E) := E,$$

$$R_{\nu+1} \text{ co}(E) := \{\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2 : 0 \leq \lambda \leq 1, \xi_1, \xi_2 \in R_\nu \text{ co}(E), \det(\xi_1 - \xi_2) = 0\},$$

pour tout $\nu \geq 1$ entier. Alors l'enveloppe rang-1 convexe de E est l'ensemble

$$R \text{ co}(E) := \bigcup_{\nu \geq 0} R_\nu \text{ co}(E)$$

Remarque 9.40. Il ne s'agit pas de la définition habituelle (mais équivalente) de l'enveloppe rang-1 convexe, mais c'est celle qui est la plus pratique pour notre travail. Voir [10], section 7.3 pour plus de détails.

Le résultat suivant, dû à Sverak [57], donne une caractérisation implicite de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits, dans le cas où les déterminants sont de même signe.

Théorème 9.41. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A), \det(B) > 0$ et $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$.

Cas 1. Si $\det(A) = \det(B) > 0$, alors

$$R \text{ co}(E) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{array}{l} \xi = \alpha R_a A + \beta R_b B, \ R_a, R_b \in SO(2) \\ 0 \leq \alpha, \beta, \alpha + \beta \leq 1, \ \det(\xi) = \det(A) = \det(B) \end{array} \right\}.$$

Cas 2. Si $\det(B) > \det(A) > 0$, alors

$$R \text{ co}(E) = \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{array}{l} \xi = \alpha R_a A + \beta R_b B, \ R_a, R_b \in SO(2) \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\det(B) - \det(\xi)}{\det(B) - \det(A)}, \ 0 \leq \beta \leq \frac{\det(\xi) - \det(A)}{\det(B) - \det(A)} \end{array} \right\}.$$

De plus, dans le second cas, l'intérieur de $R \text{ co}(E)$ est donné par la même formule, mais avec des inégalités strictes à droite.

Démonstration. Voir Dacorogna [10], théorème 7.44. □

Enfin, voici la caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits pour le cas orthogonal.

Théorème 9.42. Soit

$$\begin{aligned} E := O(n) &= \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} : CC^T = C^T C = I_n\} \\ &= \{C \in \mathbb{R}^{n \times n} : \lambda_i(C) = 1, \ i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Alors

$$R \text{ co}(E) = \{C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \lambda_i(C) \leq 1, \ i = 1, \dots, n\},$$

et

$$\text{int } R \text{ co}(E) = \{C \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \lambda_i(C) < 1, \ i = 1, \dots, n\}.$$

Démonstration. Voir Dacorogna [10], théorème 7.43. □

9.7 Annexe : polygônes

Nous finissons ce chapitre par quelques considérations sur les polygônes qui ont été développées dans le cadre de la preuve du théorème 9.13.

Définition 9.43 (Polygône). Soit $n \geq 3$.

1. Un ensemble borné $P \subset \mathbb{R}^2$ est un *polygône* (simple) s'il existe une suite finie de points distincts $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant, si nous désignons $a_0 = a_n$, les trois propriétés suivantes.

- P est constitué des segments $[a_k, a_{k+1}]$, c'est-à-dire

$$P = \bigcup_{k=1}^n [a_{k-1}; a_k].$$

- Les segments ne s'intersectent jamais en dehors des extrémités, c'est-à-dire pour tout $i \neq j$,

$$]a_i, a_{i+1}[\cap]a_j, a_{j+1}[= \emptyset.$$

- Chaque a_k ne peut appartenir qu'au segments $[a_{k-1}; a_k]$ et $[a_k; a_{k+1}]$, c'est-à-dire

$$a_k \in [a_j, a_{j+1}] \Leftrightarrow k \in \{j, j+1\}.$$

Les points $\{a_1, \dots, a_n\}$ sont les *sommets* de P et les segments $\{[a_{k-1}; a_k]\}_{k=1}^n$ sont les *côtés* de P .

2. Une *diagonale* d'un polygone est un segment joignant deux sommets non-consécutifs.

Remarque 9.44. Par abus de langage, nous appelons également *polygône* tout sous-ensemble borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\partial\Omega$ est un polygône au sens de la définition précédente.

Notation 9.45. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygône. Alors nous noterons

$$S(\Omega) := \{\text{sommets de } \Omega\}, \quad E(\Omega) := \{\text{côtés de } \Omega\}.$$

Nous noterons également $|S(\Omega)|$ la cardinalité de $S(\Omega)$, c'est-à-dire le nombre de sommets de Ω .

Proposition 9.46. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un polygône tel que $|S(\Omega)| \geq 4$. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble de segments fermés satisfaisant les hypothèses suivantes.

- (H_1) Chaque segment de Σ est une diagonale de Ω entièrement contenue dans Ω , sauf aux extrémités.
- (H_2) Chaque sommet de Ω est relié à au moins un autre sommet *non-consécutif* de Ω par un segment de Σ .

Alors il existe une intersection entre deux segments de Σ à l'intérieur de Ω .

Démonstration. Nous procédons par l'absurde : supposons qu'aucun segment de Σ ne s'intersecte dans Ω . Nous allons montrer que c'est impossible sous les hypothèses (H_1) et (H_2). La démonstration se déroule en quatre étapes.

Etape 1. Notons $\Omega = \Omega_0$ et choisissons un sommet $a_0 \in S(\Omega_0)$. Par hypothèses, il existe un sommet $b_0 \in S(\Omega_0)$ non-adjacent à a_0 et une diagonale $D_0 \subset \Sigma$ tels que

$D_0 = [a_0, b_0] \subset \overline{\Omega}$. Puisque Ω_0 est un polygône simple, alors D_0 partage Ω_0 en deux polygones simples notés Ω_1 et Ω'_1 , chacun constitué de l'un des deux chemins sur $\partial\Omega_0$ reliant a_0 et b_0 , et de D_0 (figure 9.14). De plus, ils satisfont les propriétés élémentaires suivantes :

$$\begin{aligned}\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega'_1 &= \partial\Omega_0 \cup D_0, & \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega'_1 &= D_0 = [a_0, b_0], \\ S(\Omega_1) \cup S(\Omega'_1) &= S(\Omega_0), & S(\Omega_1) \cap S(\Omega'_1) &= \{a_0, b_0\}, \\ 3 &\leq |S(\Omega_1)|, |S(\Omega'_1)| \leq |S(\Omega_0)| - 1.\end{aligned}$$

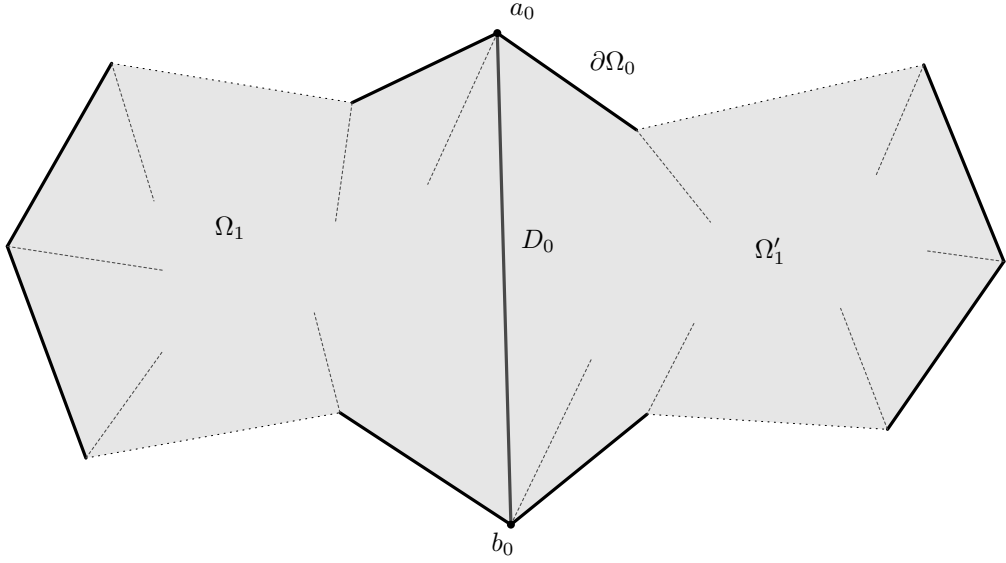


FIGURE 9.14 – Ω_0 est partagé en deux sous-polygones Ω_1 et Ω'_1 .

Justifions la première inégalité : si nous avons $|S(\Omega_1)| = 2$, alors cela impliquerait que a_0 et b_0 sont des sommets adjacents dans Ω_0 , et donc D_0 coïnciderait avec un côté de Ω , ce qui est exclu par (H_1) . Nous avons deux cas qui se présentent :

$$\min \{|S(\Omega_1)|, |S(\Omega'_1)|\} = 3 \quad \text{ou} \quad \min \{|S(\Omega_1)|, |S(\Omega'_1)|\} > 3$$

Le cas où l'un des polygones est un triangle est traité à l'étape 2 et le second cas, à l'étape 3.

Etape 2. Si l'un des polygones, disons Ω_1 , possède exactement 3 sommets, c'est à dire

$$S(\Omega_1) = \{a_0, b_0, c\},$$

alors on a une contradiction. En effet, par (H_2) , il existe $d \in S(\Omega_0)$ et $D_1 \in \Sigma$ tels que $D_1 = [c, d] \subset \overline{\Omega_0}$. Or, d n'étant pas adjacent à c , nous avons nécessairement $d \in S(\Omega'_1)$. Puisque D_1 est entièrement contenu dans $\overline{\Omega_0}$ et que Ω_1 et Ω'_1 ne sont séparés que par D_0 , alors D_1 doit nécessairement intersecter D_0 , ce qui contredit l'hypothèse de non-intersection (figure 9.15).

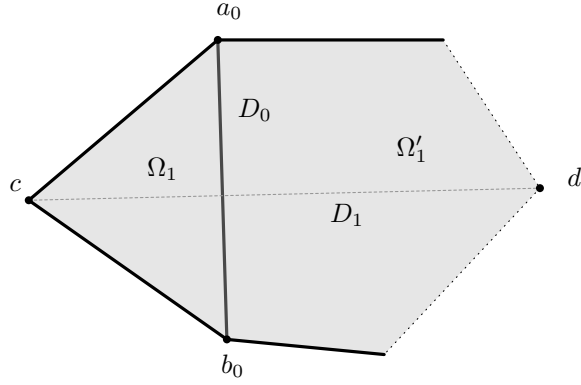


FIGURE 9.15 – Si Ω_1 est un triangle, alors il y a nécessairement une intersection entre diagonales.

Etape 3. Supposons que Ω_1 et Ω'_1 possèdent chacun plus de 3 sommets. Choisissons l'un des deux, disons Ω_1 . Pour les mêmes raisons que dans l'étape 2, les sommets de Ω_1 ne peuvent être reliés qu'à d'autres sommets de Ω_1 . En effet toute diagonale dans Σ qui relie un sommet de Ω_1 à un sommet de Ω'_1 intersecte D_0 , ce qui est exclu (figure 9.16).

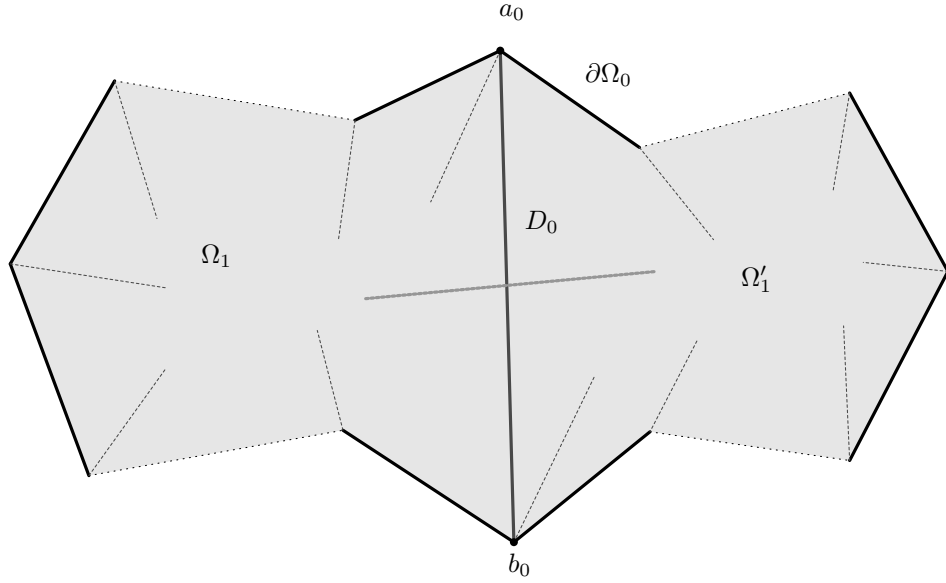


FIGURE 9.16 – Les diagonales partant de sommets dans Ω_1 restent dans Ω_1 , autrement il y aurait une intersection.

Nous appliquons la procédure de dichotomie suivante.

1. Choisissons un sommet $a_1 \in S(\Omega_1) \setminus \{a_0, b_0\}$. Alors il existe un sommet $b_1 \in S(\Omega_1)$ (éventuellement a_0 ou b_0) et un segment $D_1 \subset \Sigma$ tels que $D_1 = [a_1, b_1] \subset \overline{\Omega_1}$.

2. Le segment D_1 partage Ω_1 en deux polygones simples Ω_2 et Ω'_2 satisfaisant

$$\partial\Omega_2 \cup \partial\Omega'_2 = \partial\Omega_1 \cup D_1, \quad \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega'_2 = D_1 = [a_1, b_1],$$

$$S(\Omega_2) \cup S(\Omega'_2) = S(\Omega_1), \quad S(\Omega_2) \cap S(\Omega'_2) = \{a_1, b_1\},$$

$$3 \leq |S(\Omega_2)|, |S(\Omega'_2)| \leq |S(\Omega_1)| - 1 \leq |S(\Omega_0)| - 2.$$

3. Un seul de ces polygones a pour côté le segment D_0 . Choisissons l'autre, disons Ω_2 (9.17).

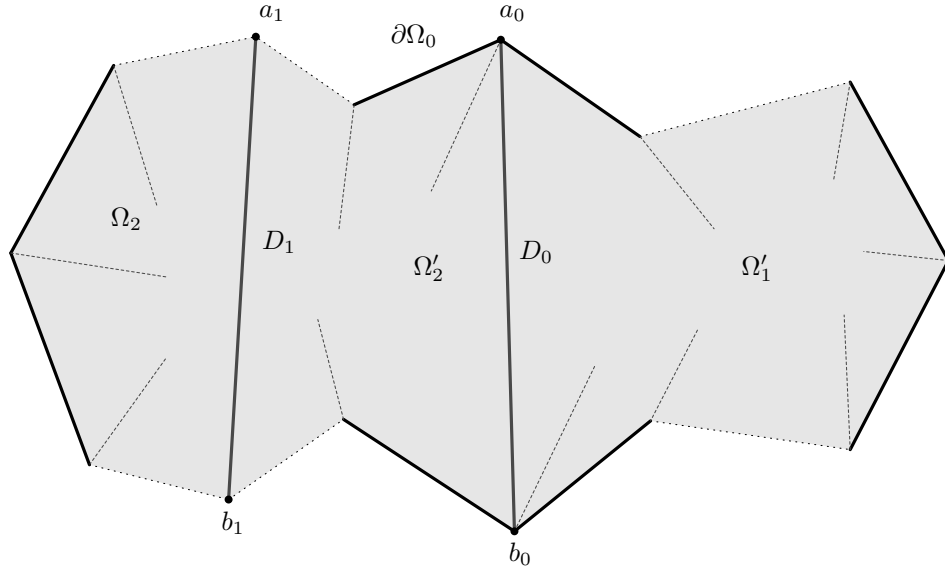


FIGURE 9.17 – Ω_1 est partagé en deux sous-polygones Ω_2 et Ω'_2 .

4. Il y a deux cas possible. D'une part, si $|S(\Omega_2)| = 3$, alors on obtient une contradiction identique à celle de l'étape 2. D'autre part, si $|S(\Omega_2)| > 3$, alors on re-applique la même procédure à Ω_2 .

Etape 4. On réitère la procédure de dichotomie précédente de manière à obtenir une suite de polygones Ω_n , avec

$$3 \leq |S(\Omega_n)| \leq |S(\Omega_{n-1})| - 1 \leq |S(\Omega_0)| - n, \quad n \geq 1,$$

jusqu'à finalement avoir un polygone Ω_N qui soit un triangle. Puisque $4 \leq |S(\Omega_0)| < \infty$, alors

$$1 \leq N \leq |S(\Omega_0)| - 3$$

Le triangle Ω_N nous donne une contradiction identique à celle de l'étape 2, ce qui termine la preuve. \square

CHAPITRE 10

LE CAS SEMI-DÉGÉNÉRÉ $\text{DET}(A) \neq 0, \text{DET}(B) = 0$

Nous allons maintenant traiter le cas dit *semi-dégénéré* du problème des deux puits, où l'une des matrices est inversible, et la seconde singulière, c'est-à-dire

$$\det(A) \neq 0 \quad \text{et} \quad \det(B) = 0.$$

Ce cas a été traité par Dacorogna-Marcellini-Paolini [22] qui ont établi des conditions nécessaires pour l'existence de solutions affines par morceaux pour le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.1)$$

où u_0 est une fonction affine.

Dans ce chapitre, nous commencerons par montrer une caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits, en se basant sur la preuve de Sverak [57] pour le cas non-dégénéré, puis appliquerons la méthode des catégories de Baire (cf Dacorogna-Marcellini [12]-[14]) pour prouver l'existence de solutions lipschitziennes pour (10.1).

Ensuite, nous montrerons un résultat d'existence de solutions localement affines par morceaux pour une certaine classe de données au bord affines u_0 telles que

$$\nabla u_0 \in \partial \text{Rco}(E).$$

Pour finir, nous entamerons une analyse du problème (10.1) sur des demi-plans et des angles de plan avec des données de bord appartenant à l'intérieur de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits.

10.1 L'enveloppe rang-1 convexe

Dans cette section, nous montrons une caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits (voir définition 9.39). Nous commençons par déterminer les connexions de

rang-1 qui peuvent survenir dans les deux puits (comparer avec le lemme 9.1).

Lemme 10.1. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) = 0$, et notons $\lambda_1(BA^{-1}) = 0$, $\lambda_2(BA^{-1}) > 0$ les valeurs singulières de la matrice BA^{-1} . Alors les trois assertions suivantes sont vraies.

- (i) Le puits \mathbb{S}_A n'admet aucune rang-1-connexion non-triviale avec lui-même, c'est-à-dire

$$\det(A - R_\varphi A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = 0.$$

- (ii) Le puits \mathbb{S}_B est totalement rang-1 connecté avec lui-même, c'est-à-dire

$$\det(B - R_\varphi B) = 0, \quad \forall \varphi \in]-\pi, \pi].$$

- (iii) Les puits \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B sont rang-1-connectés si et seulement

$$1 \leq \lambda_2(BA^{-1}).$$

De plus,

$$\det(A - R_\Theta B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\Theta) = \frac{1}{\lambda_2(BA^{-1})}.$$

En particulier, si $\lambda_2(BA^{-1}) = 1$, alors $\det(A - B) = 0$.

Remarque 10.2.

- (i) Contrairement au cas non dégénéré, il existe des connexions de rang-1 à l'intérieur d'un même puits, celui qui est dégénéré.
- (ii) De la même manière que dans le chapitre 9, nous pouvons, sans perte de généralité, restreindre notre analyse aux matrices

$$A = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

où $\mu \geq 0$ est la seconde valeur singulière de la matrice BA^{-1} (la première étant 0). En particulier, I_2 est rang-1 connecté aux matrices

$$B_\pm := \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{\mu^2 - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_B.$$

Démonstration. Le point (i) a déjà été montré dans le lemme 9.1, et le point (ii) est trivial. Montrons le point (iii) avec $A = I_2$ et $B = \text{diag}(0, \mu)$, $\mu \geq 0$. Pour tout $R_\varphi \in SO(2)$, nous avons

$$R_\varphi B = \begin{pmatrix} 0 & \sin(\varphi)\mu \\ 0 & \cos(\varphi)\mu \end{pmatrix},$$

d'où

$$\det(A - R_\varphi B) = 1 - \cos(\varphi)\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\varphi) = 1/\mu \quad \Leftrightarrow \quad \mu \geq 1.$$

□

Lemme 10.3. Soient $s, t \in \mathbb{R}$, $R_\theta, R_\varphi \in SO(2)$. Alors il existe $0 \leq r \leq |s| + |t|$, $R_\psi \in SO(2)$ tels que

$$sR_\theta + tR_\varphi = rR_\psi. \quad (10.2)$$

En particulier, l'enveloppe convexe de $SO(2)$, notée $\text{co}(SO(2))$, est caractérisée par

$$\text{co}(SO(2)) = [0, 1]SO(2) = \{rR_\varphi : 0 \leq r \leq 1, R_\varphi \in SO(2)\}. \quad (10.3)$$

Démonstration. Sans perte de généralité on peut supposer que $s, t \geq 0$, quitte à les remplacer par leur valeur absolue et ajouter π à θ et/ou φ . Pour avoir (10.2), il suffit de choisir r et ψ tels que

$$\begin{aligned} r^2 &= (s \cos(\theta) + t \cos(\varphi))^2 + (s \sin(\theta) + t \sin(\varphi))^2, \\ \cos(\psi) &= \frac{s \cos(\theta) + t \cos(\varphi)}{r}, \quad \sin(\psi) = \frac{s \sin(\theta) + t \sin(\varphi)}{r}. \end{aligned}$$

Posons

$$X := [0, 1]SO(2).$$

L'égalité (10.3) découle directement du fait que X est connexe (par ce qui précède), et que tout élément $\xi = rR_\psi \in X$ se décompose

$$\xi = \frac{r+1}{2}R_\psi + \frac{1-r}{2}R_{\psi+\pi} \in \text{co}(SO(2)).$$

□

Lemme 10.4. Soit $E \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ un ensemble rang-1 convexe et $K \subset \mathbb{R}^{n \times n}$ compact. Alors

$$\partial K \subset E \quad \Rightarrow \quad K \subset E.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que tout élément de K peut s'écrire comme une combinaison rang-1 convexe d'éléments de ∂K . Soit donc $\xi \in K$. Si $\xi \in \partial K$, il n'y a rien à montrer ; nous supposons donc que $\xi \in \text{int}(K)$. Soit $\eta \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice de rang-1 et posons

$$\xi_t := \xi + \eta t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Puisque K est compact, il existe $t_1 < 0 < t_2$ tels que $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in \partial K \subset E$. Ecrivant

$$\xi = \frac{t_2}{t_2 - t_1} \xi_{t_1} + \frac{-t_1}{t_2 - t_1} \xi_{t_2},$$

puisque E est rang-1 convexe, $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in E$ et

$$\text{rg}(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) = (t_1 - t_2)\text{rg}(\eta) \leq 1,$$

alors on a bien $\xi \in E$. □

Nous commençons par donner une caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits dans le cas trivial où il n'y a aucune connexion de rang un entre les deux puits.

Théorème 10.5. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que

$$\det(A) > 0, \quad \det(B) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq \lambda_2(BA^{-1}) < 1.$$

Posons $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors l'enveloppe rang-1 convexe de E est caractérisée par

$$\text{R co}(E) = \begin{cases} E = \mathbb{S}_A \cup \{0\} & : \lambda_2(BA^{-1}) = 0, \\ \mathbb{S}_A \cup [0, 1]\mathbb{S}_B & : 0 < \lambda_2(BA^{-1}) < 1. \end{cases}$$

En particulier,

$$\text{int R co}(E) = \emptyset.$$

Démonstration. Sans perte de généralité nous supposons que $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$, avec $0 \leq \mu < 1$. Par le lemme 10.1, les seules connexions de rang 1 non-triviales possibles sont dans le puits \mathbb{S}_B , dans lequel tout les éléments sont rang-1 connectés. Par conséquent, invoquant le lemme 10.3,

$$\text{R co}(E) = \mathbb{S}_A \cup \text{co}(\mathbb{S}_B) = \mathbb{S}_A \cup [0, 1]\mathbb{S}_B.$$

Si $\mu = 0$, alors $\mathbb{S}_B = \{0\}$, et donc $\text{R co}(E) = E = \mathbb{S}_A \cup \{0\}$. □

Voici le résultat principal de cette section.

Théorème 10.6. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que

$$\det(A) > 0, \quad \det(B) = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_2(BA^{-1}) \geq 1.$$

Posons $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors les enveloppes convexe et rang-1 convexe de E sont caractérisées par

$$\begin{aligned} \text{co}(E) &= SO(2) \{sA + tR_\varphi B : 0 \leq s, t, s+t \leq 1, R_\varphi \in SO(2)\}, \\ \text{R co}(E) &= SO(2) \left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{array}{l} \xi = sA + tR_\varphi B, R_\varphi \in SO(2) \\ 0 \leq s \leq \frac{\det(\xi)}{\det(A)}, 0 \leq t \leq 1 - \frac{\det(\xi)}{\det(A)} \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Si, de plus, $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$, alors l'intérieur de $\text{R co}(E)$ est non-vidé et est donné par la même formule, mais avec des inégalités strictes partout.

Remarque 10.7.

- (i) La formule (10.4) est exactement celle que Sverak [57] a établi pour le cas $\det(A) \geq \det(B) > 0$, mais avec $\det(B) = 0$. La preuve, essentiellement adaptée de Dacorogna-Marcellini [15], sera montrée en détail. Le fait que l'un des puits soit dégénéré permet quelques simplifications au niveau du calcul de l'enveloppe rang-1 convexe (étapes 2 et 4.2 dans la preuve).
- (ii) Si $\lambda_2(BA^{-1}) = 1$, alors la caractérisation de $\text{R co}(E)$ peut explicitement s'écrire (voir étape 5 de la preuve)

$$\text{R co}(E) = SO(2)[A, B] \cup SO(2)[0, B]$$

où $[A, B] = \{tA + (1-t)B : t \in [0, 1]\}$ et, en particulier,

$$\text{int R co}(E) = \emptyset.$$

Démonstration. La formule pour l'enveloppe convexe est montrée dans [10] (théorème 7.44) pour tout $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Sans perte de généralité nous supposons que $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$. On rappelle que A n'est rang-1 connecté qu'aux matrices

$$B_{\pm} := \begin{pmatrix} 0 & \pm\sqrt{\mu^2 - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_B, \quad \text{si } \mu \geq 1.$$

La démonstration se déroule en cinq étapes. Dans l'étape 1, nous calculons explicitement $R_1 \text{co}(E)$. Dans les étapes 2 et 3, nous établissons la formule (10.4). Dans l'étape 4, nous montrons la caractérisation de l'intérieur de $R \text{co}(E)$. Enfin, dans l'étape 5, nous appliquons (10.4) pour le cas $\lambda_2(BA^{-1}) = 1$.

Etape 1. Posons

$$X := SO(2) \{ \lambda A + (1 - \lambda) B_{\pm} : \lambda \in [0, 1] \} \cup [0, 1] \mathbb{S}_B.$$

Montrons que $X = R_1 \text{co}(E)$.

(\supseteq) Montrons que pour tout $\lambda \in [0, 1]$ et $\xi_1, \xi_2 \in E$ tels que $\det(\xi_1 - \xi_2) = 0$, alors

$$\xi := \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2 \in X.$$

Il y a trois cas, qui font chacun appel au lemme 10.1.

1. Si $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_A$, alors puisque A est inversible,

$$\det(\xi_1 - \xi_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_1 = \xi_2,$$

d'où $\xi = \xi_1 \in X$, puisque $\mathbb{S}_A \subset X$.

2. Si $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_B$, alors puisque B est singulière,

$$\det(\xi_1 - \xi_2) = 0, \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{S}_B,$$

d'où $\xi \in \text{co}(\mathbb{S}_B) = [0, 1] \mathbb{S}_B \subset X$.

3. Si $\xi_1 = R_{\varphi} A \in \mathbb{S}_A$, $\xi_2 \in \mathbb{S}_B$. Alors

$$\det(R_{\varphi} A - \xi_2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \xi_2 = R_{\varphi} B_{\pm},$$

d'où

$$\xi = R_{\varphi}(\lambda A + (1 - \lambda) B_{\pm}) \in X.$$

(\subseteq) Puisque $\det(A - B_{\pm}) = 0$, on a trivialement

$$SO(2) \{ \lambda A + (1 - \lambda) B_{\pm} : \lambda \in [0, 1] \} \subset R_1 \text{co}(E).$$

Enfin, tout $\xi \in [0, 1] \mathbb{S}_B$ admet une décomposition rang-1 convexe donnée par

$$\xi = r R_{\varphi} B = \frac{r+1}{2} R_{\varphi} B + \frac{1-r}{2} R_{\varphi+\pi} B \in R_1 \text{co}(E).$$

Etape 2. Posons

$$Y := SO(2) \{ \xi = sA + tR_{\varphi} B : 0 \leq s \leq \det(\xi), 0 \leq t \leq 1 - \det(\xi) \}$$

et montrons l'inclusion $\text{Rco}(E) \subset Y$. Etant évident que $E \subset Y$, il suffit de voir que Y est polyconvexe (donc rang-1 convexe) pour avoir l'inclusion. Une condition suffisante (voir [10], théorème 7.4) pour la polyconvexité est que pour tout $\xi_i \in Y$ et $t \in \Lambda_6$ tels que

$$\xi := \sum_{i=1}^6 t_i \xi_i \quad \text{et} \quad \det(\xi) = \sum_{i=1}^6 t_i \det(\xi_i),$$

alors $\xi \in Y$, où

$$\Lambda_6 := \left\{ t = (t_1, \dots, t_6) \in \mathbb{R}_+^6 : \sum_{i=1}^6 t_i = 1 \right\}.$$

Soit un tel $\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Par le lemme 10.3,

$$\xi = \sum_{i=1}^6 t_i (\sigma_i R_{\psi_i} + \tau_i R_{\varphi_i} B) = \sigma R_{\psi} + \tau R_{\varphi} B,$$

avec

$$\sigma \leq \sum_{i=1}^6 t_i \sigma_i \leq \sum_{i=1}^6 t_i \det(\xi_i) = \det(\xi)$$

et

$$\tau \leq \sum_{i=1}^6 t_i \tau_i \leq \sum_{i=1}^6 t_i (1 - \det(\xi_i)) = 1 - \det(\xi),$$

d'où $\xi \in Y$.

Etape 3. Pour montrer $Y \subset \text{Rco}(E)$, il suffit, par le lemme 10.4 de montrer que $\partial Y \subset \text{Rco}(E)$, Y étant clairement compact. Remarquant que $\partial Y = Y_1 \cup Y_2$, avec

$$Y_1 := \{\xi = sR_{\theta}A + tR_{\varphi}B : 0 \leq s \leq \det(\xi), \ t = 1 - \det(\xi)\},$$

$$Y_2 := \{\xi = sR_{\theta}A + tR_{\varphi}B : s = \det(\xi), \ 0 \leq t \leq 1 - \det(\xi)\},$$

nous allons montrer $Y_1, Y_2 \subset \text{Rco}(E)$,

Etape 3.1. Fixons $0 \leq \tau \leq 1$ et posons

$$Y_1^{\tau} := \{\xi = sR_{\theta}A + \tau R_{\varphi}B : 0 \leq s \leq \det(\xi), \ \det(\xi) = 1 - \tau\},$$

de sorte que $Y_1 = \bigcup_{0 \leq \tau \leq 1} Y_1^{\tau}$. Posons également

$$\mathcal{M} := \{\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \det(\xi) = 1 - \tau\}.$$

Alors \mathcal{M} est une variété de dimension 3, Y_1^{τ} est compact dans \mathcal{M} et le bord de Y_1^{τ} (relativement à la variété \mathcal{M}) est donné par

$$\partial Y_1^{\tau} = \{\xi = (1 - \tau)R_{\theta}A + \tau R_{\varphi}B : \det(\xi) = 1 - \tau\}.$$

On constate que pour tout $\xi \in \partial Y_1^{\tau}$,

$$\det(\xi) = (1 - \tau)^2 + \tau(1 - \tau)\mu \cos(\varphi - \theta) = \det(\xi)^2 + \det(\xi)(1 - \det(\xi))\mu \cos(\varphi - \theta),$$

ce qui est équivalent à

$$0 = \det(\xi)(1 - \det(\xi))(1 - \mu \cos(\varphi - \theta)).$$

Si $\det(\xi) \in \{0, 1\}$, alors $\xi \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \subset \text{R co}(E)$. Autrement, on a nécessairement

$$\mu \cos(\varphi - \theta) = 1$$

et donc $R_{-\theta}\xi = (1 - \tau)A + \tau B_{\pm} \in \text{R}_1 \text{ co}(E)$ par l'étape 1, d'où

$$\partial Y_1^\tau \subset \text{R co}(E).$$

Soit maintenant $\xi = sA + \tau R_\varphi B \in \text{int}(Y_1^\tau)$ (où l'intérieur est relatif à \mathcal{M}). Montrons d'abord que l'on peut écrire

$$\xi = \sqrt{\det(\xi)} R_\psi + s \begin{pmatrix} \sin(\psi) - 1 & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & \sin(\psi) + 1 \end{pmatrix}, \quad (10.5)$$

où $s > 0$. Nous devons résoudre

$$\begin{aligned} \sigma \cos(\varphi) &= \sqrt{\det(\xi)} \cos(\psi) + s(\sin(\psi) - 1) \\ \sigma \cos(\varphi) + \tau \mu &= \sqrt{\det(\xi)} \cos(\psi) + s(\sin(\psi) + 1) \\ \sigma \sin(\varphi) &= \sqrt{\det(\xi)} \sin(\psi) - s \cos(\psi). \end{aligned}$$

Alors nécessairement $s = \frac{\tau \mu}{2}$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} \sqrt{\det(\xi)} \cos(\psi) + s \sin(\psi) = \sigma \cos(\varphi) + s \\ -s \cos(\psi) + \sqrt{\det(\xi)} \sin(\psi) = \sigma \sin(\varphi). \end{cases} \quad (10.6)$$

Vérifions la compatibilité de ces équations : en élevant au carré et en sommant, nous obtenons

$$\det(\xi) + s^2 = \sigma^2 + 2\sigma s \cos(\varphi),$$

c'est-à-dire

$$\det(\xi) = \sigma(\sigma + \tau \mu \cos(\varphi)).$$

Cette égalité étant vraie, le système (10.6) est résoluble. Multipliant la première équation par $\sqrt{\det(\xi)}$, la seconde par $-s$ et sommant, nous avons

$$(\det(\xi) + s^2) \cos(\psi) = \sigma \sqrt{\det(\xi)} \cos(\varphi) - \sigma s \sin(\varphi) + s \sqrt{\det(\xi)}.$$

De même, nous avons également

$$(\det(\xi) + s^2) \sin(\psi) = \sigma s \cos(\varphi) + \sigma \sqrt{\det(\xi)} \sin(\varphi) + s^2,$$

ce qui achève de montrer la décomposition (10.5).

Posons ensuite

$$\xi_t := \sqrt{\det(\xi)} R_\psi + t \begin{pmatrix} \sin(\psi) - 1 & \cos(\psi) \\ -\cos(\psi) & \sin(\psi) + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

qui satisfait

$$\xi_s = \xi, \quad \det(\xi_t) = \det(\xi) = 1 - \tau, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Autrement dit, l'ensemble $\{\xi_t\}$ est une ligne de rang-1 contenue dans \mathcal{M} . Puisque Y_1^τ est compact et $\xi \in \text{int}(Y_1^\tau)$, alors il existe $t_1 < s < t_2$ tels que $\xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in \partial Y_1^\tau \subset R_1 \text{co}(E)$, et donc on peut écrire

$$\begin{aligned} \xi = \xi_s &= \left(\frac{t_2 - s}{t_2 - t_1} \right) \xi_{t_1} + \left(\frac{s - t_1}{t_2 - t_1} \right) \xi_{t_2}, \\ \det(\xi_{t_1} - \xi_{t_2}) &= 0, \quad \xi_{t_1}, \xi_{t_2} \in R_1 \text{co}(E), \end{aligned}$$

d'où $\xi \in R_2 \text{co}(E)$.

Etape 3.2. L'ensemble Y_2 peut se traiter exactement de la même façon que pour Y_1 , cependant, nous proposons ici une décomposition rang-1 convexe explicite qui montre que $Y_2 \subset R_2 \text{co}(E)$. Soit $\xi \in Y_2$. Si $\sigma = 0$, alors $\xi = \tau R_\varphi B \in [0, 1] \mathbb{S}_B \subset R_1 \text{co}(E)$. Si $\sigma \neq 0$, alors

$$\sigma = \det(\xi) = \sigma(\sigma + \tau\mu \cos(\varphi)),$$

d'où $\sigma + \tau\mu \cos(\varphi) = 1$ et

$$\xi = \begin{pmatrix} \sigma & \tau\mu \sin(\varphi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, puisque $\sigma + \tau \leq 1$, alors

$$\begin{aligned} \sigma + \tau\mu \cos(\varphi) = 1 &\Rightarrow \cos(\varphi) \geq 1/\mu \geq 0 \\ &\Rightarrow |\sin(\varphi)| \leq \sqrt{1 - 1/\mu^2}, \end{aligned}$$

d'où

$$\mu |\sin(\varphi)| \leq \sqrt{\mu^2 - 1}. \quad (10.7)$$

En posant

$$2a = 1 - \sigma + \frac{\tau\mu^2 \sin(\varphi)}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad 2b = 1 - \sigma - \frac{\tau\mu \sin(\varphi)}{\sqrt{\mu^2 - 1}},$$

nous avons

$$\xi = \sigma A + aB_+ + bB_-, \quad \sigma + a + b = 1,$$

et, par (10.7),

$$\begin{aligned} a &\leq \frac{1}{2}(1 - \sigma + \tau) \leq 1 - \sigma \leq 1, \\ a &\geq \frac{1}{2}(1 - \sigma - \tau) \geq 0, \end{aligned}$$

d'où $0 \leq a \leq 1$, et de même $0 \leq b \leq 1$. Enfin, on écrit

$$\xi = (1 - b) \underbrace{\left[\left(\frac{1 - a - b}{1 - b} \right) A + \left(\frac{a}{1 - b} \right) B_+ \right]}_{=: \xi_1} + b \underbrace{B_-}_{=: \xi_2}.$$

Nous avons évidemment $\xi_2 \in E \subset R_1 \text{co}(E)$ et, par l'étape 1, $\xi_1 \in R_1 \text{co}(E)$. De plus,

$$\det(\xi_1 - \xi_2) = \det \begin{pmatrix} 1 - \frac{a}{1-b} & 1 + \frac{a}{1-b} \sqrt{\mu^2 - 1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

d'où $\xi \in \text{R co}(E)$, ce qui achève de montrer l'inclusion $Y \subset \text{R co}(E)$.

Etape 4. Pour finir, posons

$$Y^o := SO(2) \{ \xi = \sigma A + \tau R_\varphi B : 0 < s < \det(\xi), 0 < t < 1 - \det(\xi) \}$$

et montrons que $\text{intR co}(E) = Y^o$.

La continuité de la fonction $\det : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$ implique que Y^o est ouvert, ce qui donne directement $Y^o \subset \text{intR co}(E)$, puisque par l'étape précédente, $Y^o \subset Y \subset \text{R co}(E)$.

Nous montrons la seconde inclusion par l'absurde, en supposant que l'une des inégalités stricte dans la caractérisation de Y^o est en fait une égalité. Il y a trois étapes.

Etape 4.1. Soit $\xi = \sigma A + \tau R_\varphi B \in \text{intR co}(E)$ avec

$$\sigma \leq \det(\xi) \quad \text{et} \quad \tau = 1 - \det(\xi).$$

Puisque $\xi \in \text{intR co}(E)$, il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\xi_{t,\eta} := \xi + tR_\eta = (tR_\eta + \sigma I)A + \tau R_\varphi B \in \text{R co}(E), \quad \forall |t| \leq t_0, R_\eta \in SO(2).$$

Par la caractérisation de $\text{R co}(E)$, nous avons que

$$1 - \det(\xi) = \tau \leq 1 - \det(\xi_{t,\eta}),$$

c'est-à-dire

$$\det(\xi) \geq \det(\xi_{t,\eta}) = \det(\xi) + t \langle \xi; R_\eta \rangle + t^2,$$

d'où

$$t(t + \langle \xi; R_\eta \rangle) \leq 0, \quad \forall |t| \leq t_0, R_\eta \in SO(2),$$

ce qui n'est possible pour aucun $\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Etape 4.2. Soit $\xi = \sigma I + \tau R_\varphi B \in \text{intR co}(E)$ avec

$$\sigma = \det(\xi) \quad \text{et} \quad 0 \leq \tau < 1 - \det(\xi).$$

Puisque $\xi \in \text{intR co}(E)$, il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\xi_{t,\eta} := \xi + tR_\eta B = \sigma A + (\tau R_\varphi + tR_\chi)B \in \text{R co}(E), \quad \forall |t| \leq t_0, R_\eta \in SO(2).$$

Par la caractérisation de $\text{R co}(E)$, nous avons que

$$\det(\xi) = \sigma \leq \det(\xi_{t,\eta}) = \det(\xi) + \sigma t \mu \cos(\eta),$$

d'où

$$0 \leq \sigma t \mu \cos(\eta), \quad \forall |t| \leq t_0, R_\eta \in SO(2),$$

ce qui n'est possible que si $\sigma = 0$, c'est-à-dire $\xi = \tau R_\varphi B$, avec $\tau \in [0, 1[$. Montrons que ceci mène à une contradiction.

Pour la même raison que précédemment, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\xi_{\varepsilon,\chi} := \xi + \varepsilon R_\chi = \varepsilon R_\chi + \tau R_\varphi B \in \text{R co}(E), \quad \forall |\varepsilon| \leq \varepsilon_0, R_\chi \in SO(2).$$

Et donc

$$\varepsilon \leq \det(\xi_{\varepsilon, \chi}) = \varepsilon(\varepsilon + \tau\mu \cos(\varphi - \chi)). \quad (10.8)$$

En choisissant $0 < \varepsilon < \min\{\tau, \varepsilon_0\}$ et $\chi = \varphi + \Theta + \pi$, nous avons

$$\varepsilon + \tau\mu \cos(\varphi - \chi) = \varepsilon + \tau\mu \cos(\Theta + \pi) = \varepsilon - \tau < 0.$$

Enfin, par (10.8),

$$\varepsilon \leq \varepsilon(\varepsilon - \tau) < 0,$$

ce qui est absurde, et donc on doit avoir $\sigma < \det(\xi)$.

Etape 4.3. Pour finir, montrons que les cas $\sigma, \tau = 0$ ne sont pas admissibles dans $\text{intRco}(E)$. D'une part, les étapes 4.1 et 4.2 impliquent que si $\xi = \sigma A + \tau R_\psi B \in \text{intRco}(E)$, alors $0 \leq \sigma + \tau < 1$. En particulier, si $\tau = 0$, alors $\sigma < 1$ et $\sigma < \det(\xi) = \sigma^2$, d'où $1 < \sigma$, ce qui est absurde.

D'autre part, si $\sigma = 0$, alors nous avons

$$\det(\xi) = \det(\tau R_\psi B) = \tau^2 \det(B) = 0 = \sigma,$$

ce qui est exclu par l'étape 4.2. Nous avons ainsi montré que $\text{intRco}(E) \subset Y^\circ$.

Etape 5. Supposons que $\mu = 1$, c'est-à-dire $B = \text{diag}(0, 1)$ et $\Theta = \arccos(1/\mu) = 0$. Montrons que

$$\text{Rco}(E) = SO(2)[A, B] \cup SO(2)[0, B] =: Z.$$

Par le lemme 10.1, les seules connexions de rang 1 possibles dans E sont (à une rotation près) entre A et B , et à l'intérieur de \mathbb{S}_B , ce qui nous donne immédiatement

$$Z = \text{R}_1 \text{co}(E) \subset \text{Rco}(E).$$

Montrons l'inculusion inverse. Soit

$$\xi = sA + tR_\varphi B = \begin{pmatrix} s & -t \sin(\varphi) \\ 0 & s + t \cos(\varphi) \end{pmatrix} \in \text{Rco}(E), \quad \det(\xi) = s(s + t \cos(\varphi)),$$

avec

$$0 \leq s \leq \det(\xi) \quad \text{et} \quad 0 \leq t \leq 1 - \det(\xi), \quad (10.9)$$

ce qui implique

$$0 \leq s + t \leq 1. \quad (10.10)$$

Il y a deux cas à voir. D'une part, si $s = 0$, alors

$$\xi = tR_\varphi B, \quad \text{avec} \quad 0 \leq t \leq 1 \text{ et } R_\varphi \in SO(2),$$

d'où $\xi \in SO(2)[0, B] \subset Z$. D'autre part, si $s > 0$, alors nous avons, par (10.9) et (10.10),

$$s \leq \det(\xi) \quad \Rightarrow \quad 1 \leq s + t \cos(\varphi) \leq s + t \leq 1,$$

d'où $t = 1 - s$ et $\varphi = 0$, et donc

$$\xi = sA + (1 - s)B \in SO(2)[A, B] \subset Z,$$

ce qui termine la preuve. □

La caractérisation de $\text{int R co}(E)$ donnée par le théorème précédent nous permet d'y trouver des éléments simples, comme des segments.

Exemple 10.8. Soit $A := I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$, $\mu > 1$ et $0 < \sigma < 1$. Posons

$$\xi_t := \sigma A + tB, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors

$$\xi_t \in \text{int R co}(E) \quad \text{si} \quad \frac{1-\sigma}{\mu} < t < \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma\mu}.$$

En effet, par le théorème 10.6, $\xi_t \in \text{int R co}(E)$ si et seulement si σ et t satisfont

$$\begin{cases} 0 < \sigma < \det(\xi_t) = \sigma(\sigma + \mu t), \\ 0 < t < 1 - \det(\xi_t) = 1 - \sigma(\sigma + \mu t), \end{cases}$$

ce qui est équivalent à $\frac{1-\sigma}{\mu} < t < \frac{1-\sigma^2}{1+\sigma\mu}$, et le fait que $\mu > 1$ assure que le membre de gauche est plus petit que le membre de droite.

Le lemme suivant donne deux autres segments de matrices contenu dans $\text{int R co}(E)$, qui seront importants pour la suite.

Lemme 10.9. Soient $\mu > 1$ et les matrices

$$A_\delta := \begin{pmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1+T\delta \end{pmatrix}, \quad B_\delta := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \mu - S\delta \end{pmatrix},$$

avec $0 < T < \frac{\mu-1}{\mu+1}$, $S > \mu^2 - 1$. Alors $A_\delta, B_\delta \in \text{int R co}(E)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

Démonstration. Posons $A := I_2$ et $B := \text{diag}(0, \mu)$ et écrivons

$$A_\delta = (1-\delta)A + \delta \frac{T+1}{\mu} B, \quad B_\delta = \delta A + \left(1 - \delta \frac{S+1}{\mu}\right) B.$$

Par le théorème 10.6, nous avons

$$A_\delta, B_\delta \in \text{int R co}(E) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 < (1-\delta) < \det(A_\delta), \\ 0 < \delta \frac{T+1}{\mu} < 1 - \det(A_\delta), \\ 0 < \delta < \det(B_\delta), \\ 0 < 1 - \delta \frac{S+1}{\mu} < 1 - \det(B_\delta). \end{cases}$$

La partie gauche de ces inégalités est vraie pour tout $S, T > 0$ et $0 < \delta < \min\{1, \mu/(S+1)\}$.

Puisque

$$\det(A_\delta) = (1-\delta)(1+T\delta), \quad \det(B_\delta) = \delta(\mu - S\delta),$$

alors les inégalités de droite donnent, pour ces mêmes $\delta > 0$,

$$0 < T\delta, \quad T < \frac{\mu-1}{1+\mu-\delta\mu},$$

$$S\delta < \mu - 1, \quad S > \frac{\mu^2 - 1}{1 + \delta\mu}.$$

Ainsi, puisque $\mu > 1$ par hypothèse, en choisissant $0 < T < \frac{\mu-1}{\mu+1}$ et $S > \mu^2 - 1$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que ces inégalités soient vraies pour tout $0 < \delta \leq \delta_0$, et donc $A_\delta, B_\delta \in \text{int R co}(E)$. \square

10.2 Théorèmes d'existence

Dans cette section, nous montrons deux résultats d'existence de solutions au problème de Dirichlet : l'un pour des solutions lipschitziennes, l'autre pour des solutions affines par morceaux. Le premier résultat se base sur la méthode des catégories de Baire, employée par Dacorogna-Marcellini [15] pour le cas non-dégénéré.

Théorème 10.10 (Solutions lipschitziennes). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) > 0$, $\det(B) = 0$ et $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$. Soit $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Soit $u_0 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup \text{int R co}(E) \quad \text{presque partout dans } \Omega. \quad (10.11)$$

Alors il existe (un ensemble dense de solutions) $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Démonstration. Sans perte de généralité, nous choisissons $A := I_2$ et $B := \text{diag}\{0, \mu\}$, avec $\mu = \lambda_2(BA^{-1}) > 1$. Posons, pour tout $\delta > 0$,

$$A_\delta := \begin{pmatrix} 1-\delta & 0 \\ 0 & 1+T\delta \end{pmatrix}, \quad B_\delta := \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \mu - S\delta \end{pmatrix}, \quad E_\delta := \mathbb{S}_{A_\delta} \cup \mathbb{S}_{B_\delta},$$

Avec $0 < T < \frac{\mu-1}{\mu+1}$ et $S > \mu^2 - 1$. Puisque $\det(A_\delta) > \det(B_\delta) > 0$ pour $\delta > 0$ suffisamment petit, l'enveloppe rang-1 convexe de E_δ est donnée par

$$\left\{ \xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \begin{array}{l} \xi = \alpha R_\varphi A_\delta + \beta R_\psi B, \quad R_\varphi, R_\psi \in SO(2) \\ 0 \leq \alpha \leq \frac{\det(B_\delta) - \det(\xi)}{\det(B_\delta) - \det(A_\delta)}, \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\det(\xi) - \det(A_\delta)}{\det(B_\delta) - \det(A_\delta)} \end{array} \right\}.$$

Le résultat est une conséquence directe du corollaire 10.31, dont il suffit de vérifier les trois hypothèses.

1. Puisque $\mu > 1$, le lemme 10.9 implique que $E_\delta \subset \text{int R co}(E)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit et pour $S, T > 0$ bien choisis. Puisque $\text{int R co}(E)$ est rang-1 convexe et $\text{R co}(E_\delta)$ est compact, alors on a directement

$$\text{R co}(E_\delta) \subset \text{int R co}(E).$$

2. En écrivant

$$A_\delta = (1-\delta)A + \delta \frac{T+1}{\mu} B, \quad B_\delta = \delta A + \left(1 - \delta \frac{S+1}{\mu}\right) B,$$

nous avons directement

$$\text{dist}(A_\delta; E) \leq |A_\delta - A| \leq \delta K_1 \rightarrow 0 \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0,$$

$$\text{dist}(B_\delta; E) \leq |B_\delta - B| \leq \delta K_2 \rightarrow 0 \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0,$$

où $K_1, K_2 > 0$ sont des constantes indépendantes de δ .

3. Soit $\xi = \sigma A + R_\varphi B \in \text{intRco}(E)$, et montrons que $\xi \in \text{Rco}(E_\delta)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit. Pour commencer, nous voulons exprimer A et B en terme de A_δ et B_δ . En partant de

$$A_\delta = (1 - \delta)A + \delta \frac{T+1}{\mu} B, \quad B_\delta = \delta A + \left(1 - \delta \frac{S+1}{\mu}\right) B,$$

et substituant, on obtient

$$A = a_\delta^1 A_\delta + b_\delta^1 B_\delta, \quad B = a_\delta^2 A_\delta + b_\delta^2 B_\delta,$$

avec

$$a_\delta^1 = \frac{\mu - \delta(S+1)}{\delta^2(S-T) - \delta(\mu+1) + \mu}, \quad b_\delta^1 = \frac{\delta(T+1)}{\delta^2(T-S) + \delta(\mu+1) - \mu},$$

$$a_\delta^2 = \frac{\delta\mu}{\delta^2(T-S) + \delta(\mu+1) - \mu}, \quad b_\delta^2 = \frac{(1-\delta)\mu}{\delta^2(S-T) - \delta(\mu+1) + \mu}.$$

Remarquons que

$$a_\delta^1, b_\delta^2 \rightarrow 1, \quad a_\delta^2, b_\delta^1 \rightarrow 0 \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \xi &= (\sigma a_\delta^1 I + \tau a_\delta^2 R_\varphi) A_\delta + (\sigma b_\delta^1 I + \tau b_\delta^2 R_\varphi) B_\delta \\ &= \sigma_\delta R_{\psi_\delta} A_\delta + \tau_\delta R_{\chi_\delta} B_\delta, \end{aligned}$$

où nous avons appliqué le lemme 10.3 pour la seconde égalité. On sait que

$$\sigma_\delta R_{\psi_\delta} \rightarrow \sigma I, \quad \tau_\delta R_{\chi_\delta} \rightarrow \tau R^\varphi \quad \text{quand } \delta \rightarrow 0,$$

ce qui implique

$$|\sigma_\delta| \rightarrow \sigma, \quad |\tau_\delta| \rightarrow \tau.$$

Sans perte de généralité, quitte à ajouter π à ψ_δ et χ_δ , on peut supposer que $\sigma_\delta, \tau_\delta \geq 0$. Posons les fonctions

$$F_1(\delta) := \frac{\det(\xi) - \det(B_\delta)}{\det(A_\delta) - \det(B_\delta)} - \sigma_\delta,$$

$$F_2(\delta) := \frac{\det(A_\delta) - \det(\xi)}{\det(A_\delta) - \det(B_\delta)} - \tau_\delta.$$

Par continuité du déterminant et par construction de $A_\delta, B_\delta, \sigma_\delta$ et τ_δ , nous avons

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_1(\delta) = \det(\xi) - \sigma > 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} F_2(\delta) = 1 - \det(\xi) - \tau > 0,$$

où les inégalités strictes proviennent du fait que $\xi \in \text{intRco}(E)$. Par conséquent, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$F_1(\delta), F_2(\delta) \geq 0, \quad \forall 0 < \delta \leq \delta_0,$$

ce qui correspond exactement à $\xi \in \text{Rco}(E_\delta)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

□

Voici notre second résultat d'existence, basé sur une réduction au cas scalaire.

Théorème 10.11. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert, $A, B \subset \mathbb{R}^2$ avec $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$ et $\lambda_2(BA^{-1}) > 1$. Soient $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$ et le sous-ensemble $D \subset \partial \text{Rco}(E)$ défini par

$$D := \left\{ \xi = sR_\varphi A + tR_\theta B : 0 < s = \frac{\det(\xi)}{\det(A)}, 0 < t < 1 - s, R_\varphi, R_\theta \in SO(2) \right\}.$$

Alors pour tout $u_0 \in \text{Aff}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup D,$$

il existe une solution $u \in \text{loc Aff}_{\text{morc}}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (10.12)$$

Remarque 10.12. Il est intéressant de comparer le théorème 10.11 avec le cas non-dégénéré, sur deux points.

- Il n'est plus nécessaire que $\nabla u_0 \in \text{int Rco}(E)$ pour obtenir des solutions non-triviales. Cependant, la condition $\nabla u_0 \in E \cup D$ n'est pas nécessaire non-plus. Nous construirons notamment des solutions affines par morceaux admettant une donnée de bord satisfaisant $\nabla u_0 \in \text{int Rco}(E)$.
- Dans le cas non-dégénéré, des solutions localement affines par morceaux ne surviennent que dans le cas orthogonal ($A = I_2$, $B = I_2^-$), alors que dans le cas semi-dégénéré, aucune restriction sur les matrices n'est imposée.

Démonstration. Si $\nabla u_0 \in E$, alors $u = u_0$ est une solution triviale. Nous supposons que $A = I_2$ et $B = \text{diag}(0, \mu)$, avec $\mu > 1$. On rappelle que A est rang-1 connectée aux matrices

$$B_\pm := R_{\mp\Theta} B = \begin{pmatrix} 0 & \pm m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

où $m := \sqrt{\mu^2 - 1} > 0$, $\Theta \in [0, \pi]$, $\cos(\Theta) = 1/\mu$.

Etape 1. Posons

$$\begin{aligned} \tilde{D} &:= SO(2) \left\{ \begin{pmatrix} \sigma & \tau m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : -1 < \tau < 1, 0 < \sigma, \sigma + |\tau| < 1 \right\} \\ &= SO(2) [\text{int co}\{(1, 0), \pm(0, m)\} \times \{(0, 1)\}] \end{aligned}$$

et montrons que $D = \tilde{D}$.

(\subseteq) Soit $\xi = sA + tR_\theta B \in D$. Alors par définition de D , comme $s > 0$,

$$\begin{aligned} s = \det(\xi) = s(s + t\mu \cos(\theta)) &\Rightarrow s + t\mu \cos(\theta) = 1 \\ &\Rightarrow \cos(\theta) = \frac{1-s}{\mu t} > 1/\mu = \cos(\Theta), \quad 0 < \Theta < \pi/2 \\ &\Rightarrow |\sin(\theta)| < \sin(\Theta) = m/\mu \\ &\Rightarrow -m < t\mu \sin(\theta) < m, \end{aligned}$$

d'où

$$\xi = \begin{pmatrix} s & t\mu \sin(\theta) \\ 0 & s + t\mu \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma & \tau m \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec $\sigma := s \in (0, 1)$ et $\tau := t\mu \sin(\theta)/m \in (-1, 1)$ et

$$\sigma + |\tau| = s + \frac{t\mu |\sin(\theta)|}{m} < s + t < 1,$$

ce qui montre que $\xi \in \tilde{D}$.

(\subseteq) Soit

$$\xi = \begin{pmatrix} \sigma & \tau m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \tilde{D}.$$

En posant $s := \sigma = \det(\xi)$, $\theta := \arctan(\tau m/(1 - \sigma))$ et $t := \sqrt{(\tau m)^2 + (1 - \sigma)^2}/\mu$, nous avons

$$\xi = sA + tR_\theta B \in D.$$

En effet, puisque $-1 < \tau < 1$, $0 < \sigma$, $\sigma + |\tau| < 1$, alors on a directement $s \in]0, 1[$ et

$$0 < t < \sqrt{(1 - \sigma)^2(m^2 + 1)}/\mu = |1 - \sigma|\sqrt{\mu^2}/\mu = 1 - \sigma < 1,$$

d'où $D = \tilde{D}$.

Etape 2. Soit $u_0 \in \text{Aff}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ avec $\nabla u_0 \in D$. Sans perte de généralité, quitte à multiplier la solution par une rotation et par l'étape 1, nous pouvons prendre $u_0(x) = Cx$, avec

$$C = \begin{pmatrix} \sigma & \tau m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in D, \quad 0 < \sigma, |\tau|, \sigma + |\tau| < 1$$

d'où

$$u_0(x) = (u_0^{(1)}(x_1, x_2), u_0^{(2)}(x_1, x_2)) = (\sigma x_1 + \tau m x_2, x_2).$$

Une solution $u = (u_1, u_2)$ est directement donnée par $u_2(x_1, x_2) := x_2 = u_0^{(2)}(x)$ et par le théorème 9.31 appliqué à $E = \{(1, 0), \pm(0, m)\}$ et $u_0^{(1)} \in \text{Aff}(\bar{\Omega})$ qui satisfait

$$\nabla(u_0^{(1)}) = (\sigma, \tau m) \in \text{int co}(E).$$

□

Remarque 10.13.

- (i) En posant $\tau = 0$, dans la définition de \tilde{D} , on constate que les matrices de la forme $C = \text{diag}(\sigma, 1)$ sont admissibles. Ceci revient à choisir $\theta = 0$ et $t = \frac{1-s}{\mu}$ dans la définition de D .
- (ii) Par contre, la matrice nulle $C = 0$ n'est pas admissible, car $\sigma = \det(C) = 0$.

L'exemple suivant présente une solution globalement affine par morceaux, obtenue par construction pyramiale.

Exemple 10.14. Soient $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$, $\mu > 1$. Soient $m := \sqrt{\mu^2 - 1} > 0$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le triangle de sommets $(-1, 0)$, $(1, 1/m)$ et $(1, -1/m)$. Soit l'application

$$u_0(x_1, x_2) := \left(\frac{x_1 - 1}{2}, x_2 \right).$$

Alors

$$\nabla u_0 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \partial \text{Rco}(E) \setminus E$$

et le problème

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (10.13)$$

admet une solution $u \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$. En effet, le problème scalaire

$$\begin{cases} \nabla u_1 \in \{(1, 0), (0, \pm m)\} & \text{presque partout dans } \Omega \\ u_1 = u_0^{(1)} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution « pyramidale » $u_1 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega})$ définie par (voir figure 10.1)

$$u_1(x_1, x_2) := \max \{x_1, m|x_2|\} - 1.$$

En posant $u_2(x_1, x_2) := x_2$ et $u := (u_1, u_2)$, nous avons bien

$$\nabla u = \begin{pmatrix} \nabla u_1 \\ \nabla u_2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \pm m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \{A, R_\Theta B, R_{-\Theta} B\} \subset \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$$

presque partout dans Ω et

$$u = u_0 \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

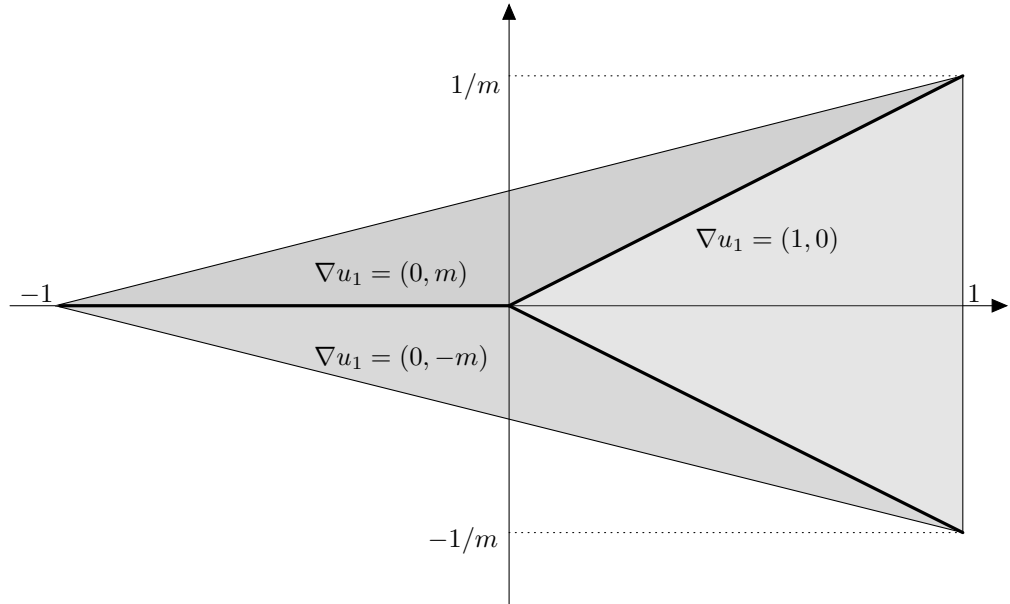


FIGURE 10.1 – Une solution « pyramidale ».

10.3 Exemples de solutions affines par morceaux

Nous avons vu dans le chapitre 9 que dans le cas non-dégénéré, toute solution régulière est nécessairement affine par morceaux et qu'il peut exister des solutions localement ou globalement affines par morceaux selon le fait que les matrices A et B soient orthogonales ou non. En particulier, il n'existe généralement pas de solutions affines par morceaux, sauf sur des domaines Ω ayant une géométrie relativement simple.

Dans le cas semi-dégénéré, la situation est beaucoup plus riche, car la rang-1 connexion des éléments du puits dégénéré permet beaucoup plus de marge de manœuvre dans la construction de solutions affines par morceaux.

Dans cette section, nous donnons quelques exemples explicites de solutions non-triviales pour un problème n'entrant pas dans le cadre du théorème 10.11 ; plus précisément, quand la donnée au bord $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ est telle que

$$\nabla u_0 \in \text{int } \text{R co}(E),$$

10.3.1 Conditions nécessaires

Nous commençons par énoncer le résultat suivant, dû à Dacorogna-Marcellini-Paolini [22], qui donne des conditions nécessaires analogues à celles du théorème 9.11 pour le cas non-dégénéré.

Théorème 10.15. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) \neq 0$ et $\det(B) = 0$ et $\mu := \lambda_2(BA^{-1}) > 0$. Soit $u \in \text{Aff}_{\text{more}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

et posons

$$\Sigma_u := \{x \in \Omega : u \text{ n'est pas différentiable en } x\}.$$

Soient

$$\nu_{\pm} := \left(\pm 1, \sqrt{\mu^2 - 1} \right), \quad \text{si } \mu \geq 1$$

et $\nu \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ tel que

$$\text{Im}(B) := \{Bx : x \in \mathbb{R}^2\} = \{t\nu : t \in \mathbb{R}\}.$$

Cas 1 : $\mu > 1$. Les propriétés suivantes sont vraies :

- chaque segment de Σ_u est perpendiculaire à l'un des trois vecteurs ν_+ , ν_- et ν ;
- à chaque fois qu'un segment perpendiculaire à ν_{\pm} est traversé, le gradient ∇u passe d'une valeur dans \mathbb{S}_A à une valeur dans \mathbb{S}_B et vice-versa, suivant les schémas, à une rotation près,

$$A \xrightarrow{\nu_+} R_{\Theta} B \xrightarrow{\nu_+} A \quad \text{et} \quad A \xrightarrow{\nu_-} R_{-\Theta} B \xrightarrow{\nu_-} A,$$

où $0 \leq \Theta \leq \pi$ est défini par

$$\cos(\Theta) = \frac{1}{\mu}, \quad \sin(\Theta) = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu}$$

- à chaque fois qu'un segment perpendiculaire à ν est traversé, alors ∇u change entre deux rotations quelconques de B (voir figure 10.2) ;
- les segments de Σ ne peuvent s'intersecter qu'en sommets d'ordre 3,4,5 ou 6, selon les treize possibilités indiquée sur la figure 10.3.

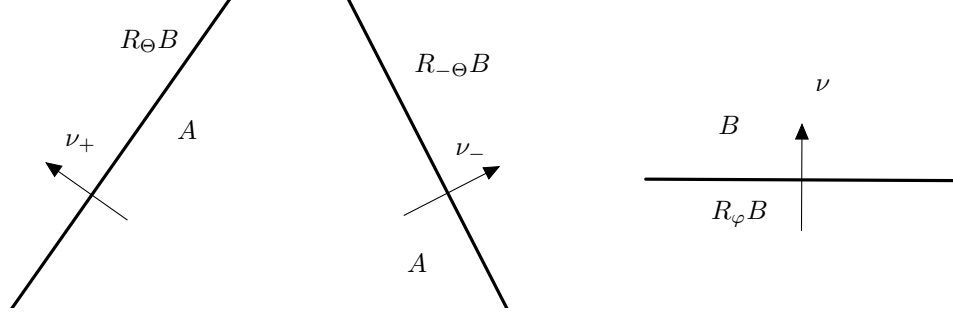


FIGURE 10.2 – Les trois directions de segments qui constituent Σ_u .

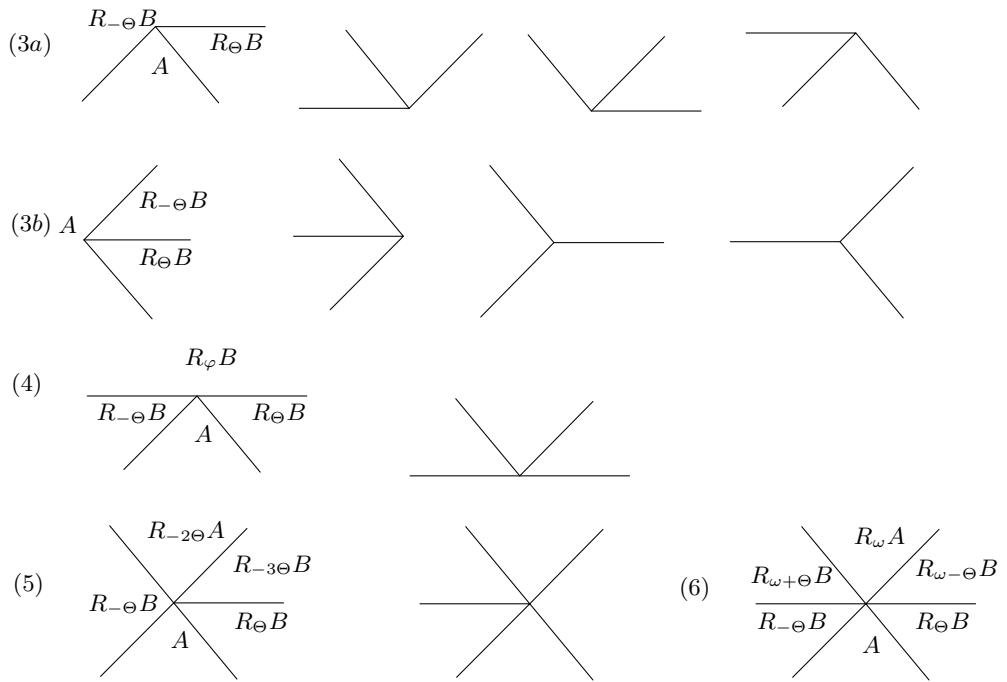


FIGURE 10.3 – Les seuls sommets internes possibles d'ordre 3,4,5 et 6.

Cas 2 : $\mu = 1$. Les propriétés suivantes sont vraies :

- ν_+ et ν_- sont parallèles, chaque segment de Σ_u est perpendiculaire à l'un des deux vecteurs ν_{\pm} et ν ;

- à chaque fois qu'un segment perpendiculaire à ν_{\pm} est traversé, le gradient ∇u passe d'une valeur dans \mathbb{S}_A à une valeur dans \mathbb{S}_B et vice-versa, suivant le schémas, à une rotation près,

$$A \xrightarrow{\nu_{\pm}} B \xrightarrow{\nu_{\pm}} A.$$

- à chaque fois qu'un segment perpendiculaire à ν est traversé, alors ∇u change entre deux rotations quelconques de B ;
- les segments de Σ ne peuvent pas s'intersecter.

Cas 3 : $0 < \mu < 1$. Il n'existe aucune interface entre les puits \mathbb{S}_A et \mathbb{S}_B . Σ_u est soit vide, soit constitué de segments perpendiculaires à ν et $\nabla u \in \mathbb{S}_B$ presque partout dans Ω .

Remarque 10.16.

- (i) Contrairement au cas non-dégénéré, nous ne pouvons pas passer des fonctions C_{morc}^1 aux fonctions affines par morceaux, parce que ∇u n'est plus nécessairement constant sur les morceaux où $\nabla u \in \mathbb{S}_B$. Ceci est dû au fait que le théorème de Liouville est faux pour les matrices singulières. Par exemple, si

$$u(x_1, x_2) = (\sin(x_1), -\cos(x_1)) \quad \text{et} \quad B = \text{diag}(1, 0),$$

alors le gradient

$$\nabla u(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \cos(x_1) & 0 \\ \sin(x_1) & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_B$$

mais n'est pas constant.

- (ii) Si $\mu \leq 1$, alors nous pouvons obtenir un résultat de non-existence de solutions affines par morceaux non-triviales pour le problème de Dirichlet de la même manière que pour le théorème 9.13.

Le théorème 10.15 donne une marge de manœuvre considérablement plus large que dans le cas non-dégénéré. Par exemple, les lignes de discontinuité peuvent ici changer de direction dans Ω (intersection d'ordre 3). Cette souplesse permet l'existence de solutions affines par morceaux non-triviales là où il n'y en avait pas dans le cas non-dégénéré, comme montré dans l'exemple 10.14.

D'un autre côté, les solutions obtenues par le théorème 10.11 et l'exemple 10.14 sont relativement triviales, car obtenues via une réduction au cas scalaire. Peut-on établir des résultats d'existence pour des données de bord plus intéressantes, comme $\nabla u_0 \in \text{int R co}(E)$? Le problème devient alors beaucoup plus compliqué et nous ne sommes pas en mesure de statuer de l'existence générale ou de la non-existence de solutions non-triviales affines par morceaux pour cette classe de conditions de bord.

Pour tenter de répondre à cette problématique, nous allons entamer une analyse sur des domaines à géométrie simple, comme des demi-plans et des angles de plans. Cette analyse est similaire à celle effectuée dans le cas non-dégénéré (voir section 9.3).

10.3.2 Analyse dans un demi-plan

Dans la proposition suivante, nous considérons une droite D_a . Le but est de trouver des matrices $C \in \text{int R co}(E)$ telles que $Ax = Cx$ ou $Bx = Cx$ sur D_a . Le résultat suivant donne une construction explicite pour de telles matrices.

Proposition 10.17. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) \neq 0$, $\det(B) = 0$ et

$$1 < \lambda_2(BA^{-1}).$$

Soit $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors pour tout $M \in E$, il existe une matrice $C \in \text{int R co}(E)$ et une pente $a > 0$ telles que

$$Mx = Cx \quad \text{sur } D_a,$$

avec $D_a := \{t(1, a) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$.

Démonstration. Sans perte de généralité, nous pouvons nous réduire à $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$ avec, par hypothèse

$$\mu = \lambda_2(BA^{-1}) > 1. \quad (10.14)$$

De plus, puisque E et $\text{int R co}(E)$ sont invariants par rotation à gauche, il suffit de traiter $M \in \{A, B\}$. La preuve se déroule en trois étapes.

Etape 1. Par le théorème 10.6, l'intérieur de l'enveloppe rang-1 convexe de E est non-vide et est donnée par

$$\text{int R co}(E) = SO(2) \{C = \sigma A + \tau R_\varphi B : 0 < \sigma < \det(C), 0 < \tau < 1 - \det(C)\}.$$

Nous voulons exprimer une matrice quelconque comme une combinaison linéaire de rotations de A et B . Pour tout $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$,

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire $C = \sigma R_\varphi A + \tau R_\psi B$. En effet, si on pose

$$c_1 = \sigma \cos(\varphi), \quad c_2 = -(\sigma \sin(\varphi) + \tau \mu \sin(\psi)),$$

$$c_3 = \sigma \sin(\varphi), \quad c_4 = \sigma \cos(\varphi) + \tau \mu \cos(\psi),$$

nous obtenons facilement

$$\sigma = \sqrt{c_1^2 + c_3^2}, \quad \tau \mu = \sqrt{(c_2 + c_3)^2 + (c_1 - c_4)^2}. \quad (10.15)$$

Etape 2. Montrons le théorème pour $M = A = I_2$. Choisissons

$$a := \frac{3}{\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad C := \frac{1}{2(\mu^2 + 8)} \begin{pmatrix} 9 & (7 + 2\mu^2)\sqrt{\mu^2 - 1}/3 \\ -3\sqrt{\mu^2 - 1} & 3(\mu^2 + 5) \end{pmatrix}.$$

Par calcul, nous pouvons constater que

$$Cx = x \quad \text{sur } D_a.$$

Ensuite, pour avoir $C \in \text{int R co}(E)$, nous devons vérifier que

$$\sigma < \det(C) = 1/2 \quad \text{et} \quad \tau < 1 - \det(C) = 1/2.$$

Par les égalités (10.15) et le fait que $\mu > 1$, nous avons

$$\sigma = \frac{3}{2\sqrt{\mu^2 + 8}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{\mu^2 + 8}} < 1/2,$$

$$\tau = \frac{\sqrt{4\mu^2 + 5}}{6\mu} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{4\mu^2 + 5}{9\mu^2}} < 1/2,$$

et donc a et C satisfont bien la conclusion du théorème.

Etape 3. Montrons le théorème pour $M = B = \text{diag}(0, \mu)$. Choisissons

$$a := \frac{1}{2\sqrt{\mu^2 - 1}}, \quad C = C(t) := \frac{1}{3\mu} \begin{pmatrix} 1 & -2\sqrt{\mu^2 - 1} \\ t\sqrt{\mu^2 - 1} & 3\mu^2 - 2t(\mu^2 - 1) \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 1/3,$$

où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre. Par calcul, nous pouvons constater que $Cx = Bx$ sur D_a , pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour avoir $C \in \text{int R co}(E)$, nous devons vérifier que

$$\sigma < \det(C) = 1/3 \quad \text{et} \quad \tau < 1 - \det(C) = 2/3.$$

D'une part, après calcul,

$$\sigma = \sigma(t) = \frac{\sqrt{1 + t^2(\mu^2 - 1)}}{3\mu}.$$

Puisque $\mu > 1$, nous avons la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} 0 < \sigma < 1/3 &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{1 + t^2(\mu^2 - 1)}}{\mu} < 1 \\ &\Leftrightarrow \frac{1 + t^2(\mu^2 - 1)}{\mu^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow t^2 < 1 \\ &\Leftrightarrow |t| < 1, \end{aligned}$$

et donc,

$$\sigma(t) < 1/3, \quad \forall |t| < 1. \tag{10.16}$$

Ensuite, pour $t = 1$, un calcul nous donne

$$\tau(1) = \frac{\sqrt{\mu^2 + 3}}{3\mu}.$$

Puisque $\mu > 1$, nous avons la suite d'équivalences

$$\begin{aligned} 0 < \tau < 2/3 &\Leftrightarrow \sqrt{\mu^2 + 3} < 2\mu \\ &\Leftrightarrow \mu^2 + 3 < 4\mu^2 \\ &\Leftrightarrow 1 < \mu^2 \\ &\Leftrightarrow 1 < \mu, \end{aligned}$$

et donc,

$$\tau(t) < 2/3, \quad \text{si } t = 1.$$

Il est évident que l'application $t \mapsto \tau(t)$ est continue dans un voisinage de $t = 1$. Par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\tau(t) < 2/3, \quad \text{si } 1 - \varepsilon < t \leq 1. \tag{10.17}$$

Grace aux inégalités (10.16) et (10.17), nous avons la conclusion. \square

Remarque 10.18.

- (i) La preuve est beaucoup plus directe que celle du cas non-dégénéré (théorème 9.16), du fait de l'absence du paramètre λ (qui est ici égal à zéro).
- (ii) Le résultat est faux pour $\lambda_2(BA^{-1}) = 1$, car $\text{int } \text{R co}(E) = \emptyset$.

Exemple 10.19. Soit $\mu = 2$. Alors par l'étape 2 de la preuve précédente, nous pouvons choisir

$$a = \sqrt{3}, \quad C = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 3 & 5/\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 9 \end{pmatrix} \in \text{int } \text{R co}(\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B),$$

avec $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, 2)$, pour avoir $Ax = Cx$ sur la droite D_a .

En utilisant les conditions nécessaires données par le théorème 10.15, nous pouvons construire une solution affine par morceaux au problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \{A, R_{\pm\Theta}B\} \subset \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10.18)$$

où $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un demi-plan dont le bord est la droite de pente $a = \sqrt{3}$,

$$\cos(\Theta) = \frac{1}{\mu}, \quad \sin(\Theta) = \frac{\sqrt{\mu^2 - 1}}{\mu}.$$

$$R_{\Theta}B = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{\mu^2 - 1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette solution est illustrée sur la figure 10.4.

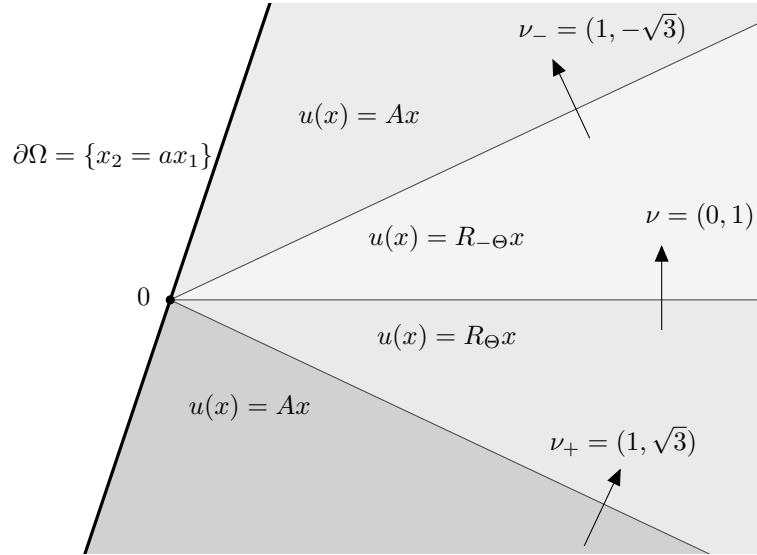


FIGURE 10.4 – Une solution non-triviale sur un demi-plan.

Exemple 10.20. Soient $B = \text{diag}(0, \mu)$, $\mu = 2$, $a = 1/2$ et

$$C = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 10/19 & 18/19 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 2/3$$

Alors pour tout $x = t(1, a) \in D_a$,

$$Cx = (0, 1) = Bx.$$

De plus,

$$\sigma = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{\sqrt{1261}}{57} < \frac{\sqrt{1444}}{57} = 2/3 = \det(C),$$

et

$$\tau = \sqrt{(c_1 - c_4)^2 + (c_2 + c_3)^2} / \mu = \frac{\sqrt{1289}}{114} < \frac{\sqrt{1444}}{114} = 1/3 = 1 - \det(C),$$

d'où $C \in \text{int R co}(E)$. Une solution affine par morceaux au problème (10.18) sur un demi-plan dont le bord est D_a est illustrée sur la figure 10.5, avec

$$R_\theta = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_{2\theta}B = \frac{1}{\mu} \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{\mu^2 - 1} \\ 0 & 2 - \mu^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

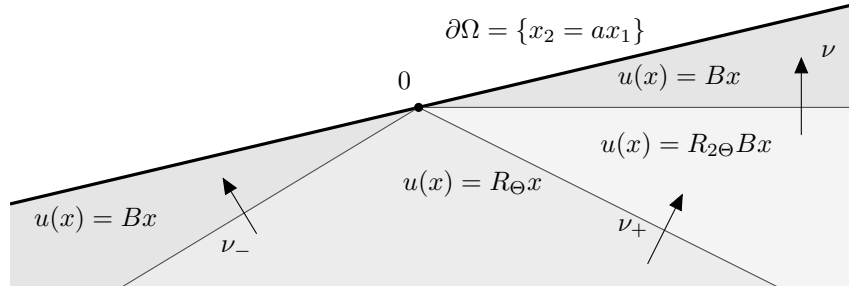


FIGURE 10.5 – Une solution affine par morceaux sur un demi-plan.

Le résultat suivant généralise la proposition 10.17 en donnant une condition nécessaire et suffisante sur la pente de la droite sur laquelle nous voulons que $Ax = Cx$.

Proposition 10.21. Soient $A = I_2$, $B = \text{diag}(0, \mu)$, avec $\mu > 1$ et $E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$. Alors il existe des matrices $C \in \text{int R co}(E)$ satisfaisant $Ax = Cx$ sur D_a si et seulement si $|a| > 1/\sqrt{\mu^2 - 1}$ et $|a| \neq \infty$.

Démonstration. On rappelle que

$$\text{int R co}(E) = SO(2) \{C = \sigma A + \tau R_\varphi B : 0 < \sigma < \det(C), 0 < \tau < 1 - \det(C)\}.$$

De plus, si nous notons

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{pmatrix},$$

alors on peut écrire

$$C = \sigma R_\varphi + t R_\psi B,$$

avec

$$\sigma = \sqrt{c_1^2 + c_3^2}, \quad \tau\mu = \sqrt{(c_2 + c_3)^2 + (c_1 - c_4)^2}, \quad (10.19)$$

$$\varphi = \arctan(c_3/c_1), \quad \psi = \arctan\left(\frac{c_2 + c_3}{c_1 - c_4}\right). \quad (10.20)$$

Soit $x = t(1, a) \in D_a$, avec $|a| \neq \infty$. Alors l'égalité $Ax = Cx$ s'écrit

$$t(1, a) = A \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} t \\ ta \end{pmatrix} = t(c_1 + ac_2, c_3 + ac_4), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

d'où

$$c_1 + ac_2 = 1, \quad c_3 + ac_4 = a. \quad (10.21)$$

Il y a cinq cas à traiter.

Cas 1 : $a = 0$. Si D_a est une droite horizontale, alors C est nécessairement de la forme

$$C = \begin{pmatrix} 1 & c_2 \\ 0 & c_4 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $C = \sigma R_\varphi + \tau R_\psi B$, nous avons par (10.19) que $\sigma = 1$, ce qui implique que $C \notin \text{int R co}(E)$, car sinon, on aurait $\det(C) > \sigma = 1$ et $0 < \tau < 1 - \det(C) < 0$, ce qui est absurde.

Cas 2 : $0 < |a| \leq 1/\sqrt{\mu^2 - 1}$. Alors (10.21) implique que

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & (1 - c_1)/a \\ c_3 & 1 - c_3/a \end{pmatrix}, \quad \det(C) = c_1 - c_3/a.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $C \in \text{int R co}(E)$ admissible. Alors c_1, c_3 doivent satisfaire les trois inégalités $0 < \det(C) < 1$, $0 < \sigma < \det(C)$ et $0 < \tau < 1 - \det(C)$, autrement dit

$$0 < c_1 - c_3/a < 1, \quad (10.22)$$

$$\sqrt{c_1^2 + c_3^2} < c_1 - c_3/a, \quad (10.23)$$

$$\frac{1}{|a|\mu} \sqrt{(a^2 + 1)[(c_1 - 1)^2 + c_3^2]} < 1 - c_1 + c_3/a. \quad (10.24)$$

Nécessairement, $c_3 \neq 0$, car sinon l'inégalité (10.23) serait fausse. Supposons que $ac_3 > 0$. En élevant l'inégalité (10.23) au carré, nous avons la suite d'implications

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_3^2 < (c_1 - c_3/a)^2 &\Rightarrow c_1 < \frac{c_3(1 - a^2)}{2a} \\ (\text{inégalité (10.22)}) &\Rightarrow c_3/a < \frac{c_3(1 - a^2)}{2a} \\ (ac_3 > 0) &\Rightarrow 1 < \frac{1 - a^2}{2} \\ &\Rightarrow a^2 < -1, \end{aligned}$$

ce qui est absurde. Montrons que la seule possibilité restante, $ac_3 < 0$, est également absurde. D'abord, puisqu'on est dans le cas où $|a| \leq 1/\sqrt{\mu^2 - 1}$, alors

$$1 \leq \frac{a^2 + 1}{a^2 \mu^2}. \quad (10.25)$$

De plus, l'inégalité (10.22) combinée avec $ac_3 < 0$ implique

$$-(c_1 - 1)c_3/a < -(c_3/a)^2 \quad (10.26)$$

Ensuite, si on élève l'inégalité (10.24) au carré, alors

$$\frac{a^2 + 1}{a^2 \mu^2} [(c_1 - 1)^2 + c_3^2] < (1 - c_1)^2 + (c_3/a)^2 + 2(c_1 - 1)(-c_3/a). \quad (10.27)$$

En combinant les inégalités (10.25)-(10.27), on obtient

$$\begin{aligned} (c_1 - 1)^2 + c_3^2 &\leq \frac{a^2 + 1}{a^2 \mu^2} [(c_1 - 1)^2 + c_3^2] \\ &< (1 - c_1)^2 + (c_3/a)^2 + 2(c_1 - 1)(-c_3/a) \\ &< (1 - c_1)^2 + (c_3/a)^2 - 2(c_3/a)^2 \\ &= (1 - c_1)^2 - (c_3/a)^2, \end{aligned}$$

ce qui aboutit à la contradiction $c_3^2(1 + 1/a^2) < 0$.

Cas 3 : $1/\sqrt{\mu^2 - 1} < |a| \leq 3/\sqrt{\mu^2 - 1}$. Posons $m := \sqrt{\mu^2 - 1} > 0$ et

$$c_1 := \frac{2a^2 - |a|m + 3}{4(a^2 + 1)}, \quad c_3 := \frac{a(1 - |a|m)}{4(a^2 + 1)} \neq 0.$$

Combinant avec (10.21), nous avons

$$C = \frac{1}{4(a^2 + 1)} \begin{pmatrix} 2a^2 - |a|m + 3 & \frac{2a^2 + |a|m + 1}{a} \\ a(1 - |a|m) & 4a^2 + |a|m + 3 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 1/2.$$

Par (10.19), nous calculons, sachant que $c_3 \neq 0$,

$$\begin{aligned} 0 < \sigma &= \sqrt{c_1^2 + c_3^2} \\ &= \frac{\sqrt{(2a^2 - |a|m + 3)^2 + a^2(1 - |a|m)^2}}{4(a^2 + 1)} \\ &= \frac{\sqrt{(a^2 + 1)^2[a^2(m^2 + 4) - 6|a|m + 9]}}{4(a^2 + 1)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{a^2(m^2 + 4) - 6|a|m + 9}{a^2 + 1}}, \end{aligned}$$

et, après un calcul similaire,

$$\tau = \frac{1}{\mu} \sqrt{(c_2 + c_3)^2 + (c_1 - c_4)^2} = \frac{1}{4|a|\mu} \sqrt{a^2(m + 4) + 2|a|m + 1} > 0.$$

Montrons que $C \in \text{int R co}(E)$, c'est-à-dire vérifions les deux inégalités

$$\sigma < 1/2, \quad \tau < 1/2.$$

En comparant les carrés de ces inégalités, nous avons

$$\begin{aligned} \sigma^2 - \frac{1}{4} &= \frac{1}{16(a^2 + 1)}(a^2(m^2 + 4) - 6|a|m + 9 - 4a^2 - 4) \\ &= \frac{1}{16(a^2 + 1)}(a^2m^2 - 6|a|m + 5) \\ &= \frac{1}{16(a^2 + 1)}(|a|m - 1)(|a|m - 5) \\ &< 0 \end{aligned}$$

puisque $1 < |a|m \leq 3$, ce qui nous donne la première inégalité. D'autre part,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} - \tau^2 &= \frac{1}{16a^2\mu^2}(4a^2(m^2 + 1) - (a^2(m^2 + 4) + 2|a|m + 1)) \\ &= \frac{1}{16a^2\mu^2}(3a^2m^2 - 2|a|m - 1) \\ &= \frac{1}{16a^2\mu^2}(3|a|m + 1)(|a|m - 1) \\ &> 0, \end{aligned}$$

puisque $|a|m > 1$, ce qui nous donne la seconde inégalité et donc $C \in \text{int R co}(E)$.

Cas 4 : $3/\sqrt{\mu^2 - 1} \leq |a|$. Posons

$$c_1 := \frac{a^2}{2(a^2 + 1)}, \quad c_3 := \frac{-a}{2(a^2 + 1)} -$$

Combinant avec (10.21), nous avons

$$C = \frac{1}{2(a^2 + 1)} \begin{pmatrix} a^2 & \frac{2+a^2}{a} \\ -a & 2a^2 + 3 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 1/2.$$

Montrons que $C \in \text{int R co}(E)$. D'une part,

$$\sigma = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \frac{|a|}{2\sqrt{a^2 + 1}} > 0,$$

et

$$\frac{1}{2} - \sigma = \frac{\sqrt{a^2 + 1} - |a|}{2\sqrt{a^2 + 1}} > 0,$$

d'où la première inégalité

$$0 < \sigma < \det(C).$$

D'autre part,

$$\tau = \frac{\sqrt{a^2 + 4}}{2\mu|a|} > 0,$$

et

$$\frac{1}{4} - \tau^2 = \frac{a^2(\mu^2 - 1) - 4}{4a^2\mu^2} = \frac{(am)^2 - 4}{4a^2\mu^2} > 0,$$

puisque $|a|m \geq 3$, ce qui nous donne la seconde inégalité

$$0 < \tau < 1 - \det(C),$$

et donc $C \in \text{int R co}(E)$.

Cas 5 : $a = \infty$. Si $Ax = Cx$ sur la droite verticale $D_\infty = \{(0, t) : t \in \mathbb{R}\}$, alors

$$(0, 1)t = A \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = (c_2, c_4)t, \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

d'où

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ c_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si on avait $C \in \text{int R co}(E)$, on aurait

$$\sqrt{c_1^2 + c_3^2} = \sigma < \det(C) = c_1 \leq \sqrt{c_1^2 + c_3^2},$$

ce qui est absurde. □

Remarque 10.22. Des tests numériques suggèrent un résultat similaire pour la matrice $B = \text{diag}(0, \mu)$: pour tout $\mu > 1$, il existe des matrices $C \in \text{int R co}(E)$ satisfaisant $Bx = Cx$ sur D_a si et seulement si $0 < |a| < 1/\sqrt{\mu^2 - 1}$. Ceci est beaucoup plus difficile à montrer, car la présence du paramètre μ dans l'expression de σ et τ rend les inégalités $\sigma < \det(C)$ et $\tau < 1 - \det(C)$ très compliquées à réduire.

10.3.3 Analyse dans un angle de plan

L'étape suivante consiste à étudier les solutions du problème de Dirichlet dans un angle de plan. Plus précisément, nous voulons établir si une solution affine par morceaux peut admettre des conditions de bord non-triviales autour du sommet d'un angle.

Par le théorème 10.15, il existe au plus trois directions possibles pour les lignes de discontinuité d'une solution u , ce qui peut produire des sommet d'ordre au plus 6 (lorsque le sommets de l'angle se situe sur une intersection de trois lignes). Tous les cas de figure possibles étant beaucoup trop nombreux, nous nous contentons de montrer deux cas donnant chacun une conclusion différente.

Dans le premier exemple, nous traitons le cas où le sommet est atteint par une seule ligne de discontinuité. Comme d'habitude, nous fixons $A = I_2$ et $B = \text{diag}(0, \mu)$.

Exemple 10.23. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un angle de plan ouvret défini par deux semi-droites de pente $-\infty < b < a < \infty$. Soit une application $u \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ satisfaisant le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u(x) = Cx & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

pour une certaine matrice $C \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Supposons que le sommet de Ω soit atteint par une unique ligne de discontinuité, perpendiculaire à $\nu_- = (-1, \sqrt{\mu^2 - 1})$ (figure 10.6). La solution u est alors constituée de deux morceaux tels que $\nabla u \in \mathbb{S}_A$ sur l'un et $\nabla u \in \mathbb{S}_B$ sur l'autre. En fixant $\nabla u = A$, alors, par le théorème 10.15, $\nabla u = R_{-\Theta}B$ sur la seconde composante connexe, avec

$$R_{-\Theta}B = \begin{pmatrix} 0 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad m := \sqrt{\mu^2 - 1}.$$

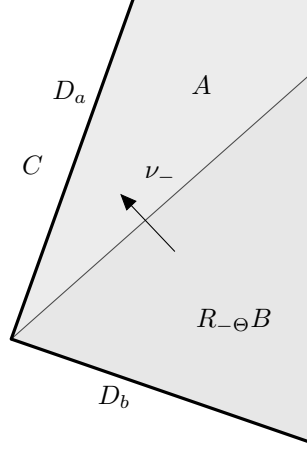


FIGURE 10.6 – Une solution sur un quart de plan dont la condition de bord ne peut pas appartenir à $\text{int R co}(E)$.

La condition de bord $u(x) = Cx$ implique

$$\begin{cases} Ax = Cx & \forall x \in D_a, \\ R_{-\Theta}Bx = Cx & \forall x \in D_b \end{cases}$$

La seule matrice C vérifiant ces équations est

$$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad c_1 = 1 - a(bm - 1)/(bm - 1), \quad c_2 = 1/(b - a)$$

Alors $C \notin \text{int R co}(E)$ pour aucun a, b, μ . En effet, nous avons

$$\sigma^2 = c_1^2 = \det(C)^2,$$

ce qui contredit l'inégalité $\sigma < \det(C)$ dans la caractérisation de $\text{int R co}(E)$ (théorème 10.6).

Dans le second exemple, nous traitons le cas d'un sommet atteint par deux lignes de discontinuité.

Exemple 10.24. Avec les mêmes notations que dans l'exemple précédent, nous supposons que le sommet de Ω est atteint par une ligne de discontinuité perpendiculaire ν_- et une ligne perpendiculaire à $\nu = (0, 1)$. Dans ce cas, par le théorème 10.15, ∇u appartient au puits \mathbb{S}_A sur l'une des composantes, et à \mathbb{S}_B sur les deux autres. En fixant $\nabla u = A$, alors $\nabla u = R_{-\Theta}B$ derrière la ligne de discontinuité perpendiculaire à ν_- , puis $\nabla u = R_\varphi B$, pour un certain $R_\varphi \in SO(2)$, derrière la ligne perpendiculaire à ν (figure 10.7).

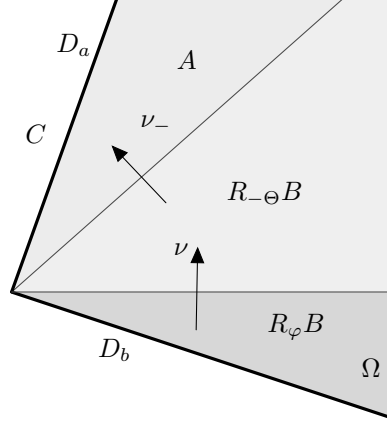


FIGURE 10.7 – Une solution sur un quart de plan admettant une condition de bord appartenant à $\text{int R co}(E)$.

Soient $\varphi = 0$, $a = 1$, $b = -1/4$ et $\mu = 2$. Alors la condition de bord $u(x) = Cx$ implique que

$$\begin{cases} Ax = Cx & \forall x \in D_a, \\ Bx = Cx & \forall x \in D_b \end{cases}$$

Alors la seule matrice C vérifiant ces équations est

$$C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad \det(C) = 2/5.$$

Nous avons alors

$$0 < \sigma = \sqrt{c_1^2 + c_3^2} = \frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{5} = \det(C)$$

et

$$0 < \tau = \sqrt{(c_2 + c_3)^2 + (c_1 - c_4)^2} / \mu = \frac{\sqrt{17}}{5\sqrt{2}} < \frac{\sqrt{18}}{5\sqrt{2}} = \frac{3}{5} = 1 - \det(C),$$

d'où $C \in \text{int R co}(E)$ (théorème 10.6).

10.4 Annexe : propriété de relaxation

Les notions et résultats suivants ont été établis par Dacorogna-Marcellini [12], [13], [14] dans le cadre de la résolution de problèmes de Dirichlet pour des inclusions différentielles par la méthode des catégories de Baire.

Définition 10.25 (Propriété de relaxation). Soient $E, K \subset \mathbb{R}^{N \times n}$. L'ensemble K a la *propriété de relaxation* par rapport à E si pour tout ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné, et pour toute fonction affine u_0 telle que

$$\nabla u_0 \in K, \quad \text{dans } \overline{\Omega},$$

il existe une suite $\{u_\nu\} \subset \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$u_\nu \in u_0 + W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad \nabla u_\nu(x) \in E \cup K, \quad \text{presque partout dans } \Omega,$$

$$u_\nu \xrightarrow{*} u_0 \text{ dans } W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N), \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_{\Omega} \text{dist}(\nabla u_\nu(x); E) dx = 0.$$

Remarque 10.26.

- (i) Dans le cas scalaire $n = 1$ ou $N = 1$, l'ensemble $K = \text{int co}(E)$ satisfait la propriété de relaxation par rapport à E .
- (ii) Dans le cas vectoriel, si K est borné et satisfait la propriété de relaxation, alors K appartient nécessairement à l'enveloppe quasi-convexe finie de E .

Théorème 10.27 (Existence de solutions). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné. Soient $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ compact et $K \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ borné et satisfaisant la propriété de relaxation par rapport à E . Soit $u_0 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup K, \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors il existe un ensemble dense de fonctions $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telles que

$$\begin{cases} \nabla u \in E & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Remarque 10.28.

- (i) Dans le cas scalaire, le plus grand K possible est

$$K = E \cup \text{int co}(E).$$

Voir Dacorogna [10], section 10.3.1.

- (ii) Moyennant quelques hypothèses supplémentaires, il est possible de généraliser la donnée au bord u_0 . Voir Dacorogna-Marcellini, chapitre 10.
 - Dans le cas scalaire, si K est ouvert, alors on peut prendre $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$. Par la remarque précédente, on a nécessairement

$$\nabla u_0 \in E \cup \text{int co}(E), \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

- Dans le cas vectoriel, si K est ouvert, alors on peut prendre $u_0 \in C_{\text{morc}}^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^N)$. Si, de plus, K est ouvert et convexe, alors on peut prendre $u_0 \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ satisfaisant

$$\nabla u_0 \in C, \quad \text{presque partout dans } \Omega$$

avec $C \subset K$ compact.

Dans la pratique, la propriété de relaxation est difficile à vérifier. Nous allons donner une condition suffisante beaucoup plus simple à vérifier.

Définition 10.29 (Propriété d'approximation). Soient $d \in \mathbb{N}$ et

$$E \subset K \subset \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^d.$$

Le triple (E, K, \mathcal{M}) (si $\mathcal{M} = \mathbb{R}^d$, on note simplement (E, K)) satisfait la *propriété d'approximation* s'il existe une collection d'ensembles E_δ et K_δ , avec $\delta > 0$ telle que

1. $E_\delta \subset K_\delta \subset \subset \text{int}_{\mathcal{M}}(K)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit (où on note $\text{int}_{\mathcal{M}}$ l'intérieur relatif à \mathcal{M}) ;
2. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$0 < \delta \leq \delta_0, \xi \in E_\delta \quad \Rightarrow \quad \text{dist}(\xi; E) \leq \varepsilon;$$

3. si $\xi \in \text{int}_{\mathcal{M}}(K)$, alors $\xi \in K_\delta$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

Théorème 10.30. Soient $n, N \in \mathbb{N}$ et

$$E \subset \mathcal{M} = \mathbb{R}^{N \times n}, K := \text{int R co}(E),$$

avec E compact. Si (E, K) satisfait la propriété d'approximation avec des ensembles E_δ et $K_\delta = \text{R co}(E)$, alors K satisfait la propriété de relaxation par rapport à E .

Nous combinons les deux théorèmes précédents pour obtenir le corollaire suivant, utilisé dans la preuve du théorème 10.10.

Corollaire 10.31. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné et $E \subset \mathbb{R}^{N \times n}$ compact. Supposons qu'il existe une collection $\{E_\delta\}_{\delta>0} \subset \mathbb{R}^{N \times n}$, telle que

1. $\text{R co}(E_\delta) \subset \subset \text{int R co}(E)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit ;
2. pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$ tel que

$$0 < \delta \leq \delta_0, \eta \in E_\delta \quad \Rightarrow \quad \text{dist}(\eta; E) \leq \varepsilon;$$

3. si $\eta \in \text{int R co}(E)$, alors $\eta \in \text{R co}(E_\delta)$ pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit.

Soit $u_0 \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ tel que

$$\nabla u_0 \in E \cup \text{int R co}(E), \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors il existe un ensemble dense de fonctions $u \in W^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^N)$ telles que

$$\begin{cases} \nabla u \in E & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

CHAPITRE 11

LE CAS DÉGÉNÉRÉ $\text{DET}(A) = \text{DET}(B) = 0$

Nous traitons maintenant le problème des deux puits dans le cas *dégénéré*, c'est-à-dire

$$\det(A) = \det(B) = 0.$$

Ce cas est beaucoup plus riche que les deux précédents, car, les matrices étant singulières, les connexions de rang-1 sont autorisées à l'intérieur de chacun des deux puits. Ceci implique que le gradient d'une solution affine par morceaux peut voir ses valeurs sur deux morceaux adjacents rester dans le même puits. Nous allons montrer (théorème 11.8) une condition suffisante sur la donnée de bord pour que le problème de Dirichlet admette une solution *localement affine par morceaux*. Plus précisément, le problème

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.1)$$

admet une solution $u \in \text{Loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ si $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ et

$$\nabla u_0 \in SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}),$$

où

$$A = e_1 \otimes \alpha, \quad B = e_1 \otimes \beta.$$

Nous verrons également (théorème 11.4) que cet ensemble coïncide avec l'intérieur de l'enveloppe rang-1 connexe de $\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$.

11.1 L'enveloppe rang-1 convexe

Dans cette section, nous donnons une caractérisation de l'enveloppe rang-1 convexe des deux puits dégénérés. Cette caractérisation sera beaucoup plus facile à montrer que

pour les cas précédent. Nous commençons par énoncer un résultat élémentaire donnant une caractérisation utile des matrices 2×2 singulières.

Lemme 11.1. Soit $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Alors $\det(A) = 0$ si et seulement si il existe des vecteurs $v = (v_1, v_2)$ et $w = (w_1, w_2)$ dans \mathbb{R}^2 , tels que $|v| = 1$ et

$$A = v \otimes w = \begin{pmatrix} v_1 w_1 & v_1 w_2 \\ v_2 w_1 & v_2 w_2 \end{pmatrix}.$$

En particulier, si $\det(A) = 0$, il existe $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\mathbb{S}_A = SO(2)e_1 \otimes \alpha.$$

Remarque 11.2. Si $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ avec $\det(A) = \det(B) = 0$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B = SO(2)e_1 \otimes \{\alpha, \beta\}.$$

Ainsi, sans perte de généralité, nous allons considérer des matrices

$$A = e_1 \otimes \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = e_1 \otimes \beta = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2.$$

Cette forme a l'avantage de pouvoir directement caractériser la rang-1 connexité entre les éléments des deux puits.

Lemme 11.3. Soient $A = e_1 \otimes \alpha$ et $B = e_1 \otimes \beta$. Alors

$$\det(A - R_\varphi B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \in \{0, \pi\} \quad \text{ou} \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 = 0.$$

Démonstration. Par un calcul, on a immédiatement

$$\det(A - R_\varphi B) = (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \sin(\varphi).$$

□

Voici un résultat caractérisant l'enveloppe rang-un convexe des deux puits dans le cas dégénéré.

Théorème 11.4. Soient $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, $\det(A) = \det(B) = 0$. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$E := \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B = SO(2)e_1 \otimes \{\alpha, \beta\}.$$

Alors

$$\text{co}(E) = SO(2) \{sA + tR_\varphi B : 0 \leq s, t, t + s \leq 1, \varphi \in]-\pi, \pi]\},$$

$$\begin{aligned} \text{Rco}(E) &= SO(2)e_1 \otimes \{s\alpha + t\beta : -1 \leq s, t, t + s \leq 1\}, \\ &= SO(2)e_1 \otimes \text{co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}). \end{aligned}$$

Si, de plus, $\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0$, alors

$$\text{int Rco}(E) = SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}) \neq \emptyset,$$

où, dans le membre de gauche, l'intérieur est relatif à la variété des matrices singulières.

Remarque 11.5. En particulier (voir étape 1 de la preuve ci-dessous), si $\beta = k\alpha$ avec $k \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned}\text{co}(E) &= \text{R co}(E) = SO(2) \{rA : 0 \leq r \leq \max\{1, |k|\}\} \\ &= SO(2)e_1 \otimes \{r\alpha : 0 \leq r \leq \max\{1, |k|\}\}.\end{aligned}$$

Démonstration. La formule pour l'enveloppe convexe $\text{co}(E)$ est démontrée dans [10] (théorème 7.44) ; nous ne montrerons donc le résultat que pour $\text{R co}(E)$. La preuve est partagée en trois étapes.

Etape 1. Nous montrons d'abord le cas particulier $\beta = k\alpha$, avec $k \in \mathbb{R}$. Sans perte de généralité, nous supposons que $k \leq 1$ (quitte à travailler avec $\alpha = k^{-1}\beta$). Posons

$$X := SO(2) \{rA : 0 \leq r \leq 1\}.$$

Puisque nous avons toujours les inclusions

$$\text{R co}(E) \subset \text{co}(E),$$

il suffit de vérifier

$$\text{co}(E) \subset X \subset \text{R co}(E).$$

Il est évident que $E \subset X$ et la convexité de X découle du lemme 10.3, ce qui donne la première inclusion. Pour la seconde inclusion, il suffit de remarquer que tout $\xi := rR_\theta A \in X$ admet la décomposition convexe

$$\xi = \frac{1+r}{2} R_\theta A + \frac{1-r}{2} R_{\theta+\pi} A,$$

avec $R_\theta A, R_{\theta+\pi} A \in E$ et

$$\det(R_\theta A - R_{\theta+\pi} A) = \det(R_\theta - R_{\theta+\pi}) \det(A) = 0,$$

d'où $X \subset \text{R}_1 \text{co}(E) \subset \text{R co}(E)$.

Etape 2. Pour le reste de la preuve, nous supposons cette fois que α et β ne sont pas parallèles, c'est-à-dire

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0. \tag{11.2}$$

Fixons la notation

$$E_\theta := R_\theta e_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta)), \quad \forall \theta \in]-\pi, \pi]$$

et posons

$$Y := SO(2)e_1 \otimes \text{co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}).$$

Nous allons montrer que $Y = \text{R}_2 \text{co}(E)$.

(\subseteq) Soit $\xi := E_\theta \otimes (s\alpha + t\beta) \in Y$. Alors on peut décomposer ξ en une « double combinaison convexe »

$$\xi = (s+t) \underbrace{\left[\frac{s}{s+t} E_\theta \otimes \alpha + \frac{t}{s+t} E_\theta \otimes \beta \right]}_{=: \xi_1} + (1-s-t) \underbrace{\left[\frac{1}{2} E_\theta \otimes \alpha + \frac{1}{2} E_{\theta+\pi} \otimes \alpha \right]}_{=: \xi_2 (=0)}.$$

Montrons d'abord que $\xi_1, \xi_2 \in R_1 \text{ co}(E)$. Il est évident que

$$E_\theta \otimes \alpha, E_\theta \otimes \beta, E_{\theta+\pi} \otimes \alpha \in E,$$

$$\det(E_\theta \otimes \alpha - E_\theta \otimes \beta) = \det(E_\theta \otimes \alpha - E_{\theta+\pi} \otimes \alpha) = 0,$$

d'où $\xi_1, \xi_2 \in R_1 \text{ co}(E)$. Enfin,

$$\det(\xi_1 - \xi_2) = \det(\xi_1) = 0,$$

d'où $\xi \in R_2 \text{ co}(E) \subset R \text{ co}(E)$.

(\supseteq) Il est clair que $E \subset Y$. Il suffit donc de voir que Y est rang-1 convexe, c'est-à-dire

$$\lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2 \in Y, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad \forall \xi_1, \xi_2 \in Y, \quad \det(\xi_1 - \xi_2) = 0.$$

Soient donc

$$\xi_1 := E_\theta \otimes (s_1 \alpha + t_1 \beta), \quad \xi_2 := E_\varphi \otimes (s_2 \alpha + t_2 \beta), \quad \xi := \lambda \xi_1 + (1 - \lambda) \xi_2.$$

Alors

$$\det(\xi_1 - \xi_2) = \sin(\theta - \varphi)(s_1 t_2 - s_2 t_1)(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1).$$

Par (11.2), cette égalité est nulle si et seulement si $\theta - \varphi \in \{-\pi, 0, \pi\}$ ou $(t_1, t_2) = k(s_1, s_2)$, avec $|k| \leq 1$. Nous traitons ces deux cas séparément.

Cas 1. Si $\theta = \varphi$, alors

$$\begin{aligned} \xi &= E_\theta \otimes [\lambda(s_1 \alpha + t_1 \beta) + (1 - \lambda)(s_2 \alpha + t_2 \beta)] \\ &= E_\theta \otimes [(\lambda s_1 + (1 - \lambda)s_2)\alpha + (\lambda t_1 + (1 - \lambda)t_2)\beta] \\ &= E_\theta \otimes (r_1 \alpha + r_2 \beta). \end{aligned}$$

Puisque $s_i, t_i, s_i + t_i \in [-1, 1]$, alors on a également $r_1, r_2, r_1 + r_2 \in [-1, 1]$, et donc $\xi \in Y$.

De même, si $\theta = \varphi \pm \pi$, alors on pose $\tilde{s}_2 := -s_2, \tilde{t}_2 := -t_2$ et on a

$$\begin{aligned} \xi &= E_\theta \otimes [\lambda(s_1 \alpha + t_1 \beta) - (1 - \lambda)(s_2 \alpha + t_2 \beta)] \\ &= E_\theta \otimes [(\lambda s_1 - (1 - \lambda)s_2)\alpha + (\lambda t_1 - (1 - \lambda)t_2)\beta] \\ &= E_\theta \otimes [(\lambda s_1 + (1 - \lambda)\tilde{s}_2)\alpha + (\lambda t_1 + (1 - \lambda)\tilde{t}_2)\beta] \\ &= E_\theta \otimes (r_1 \alpha + r_2 \beta) \end{aligned}$$

qui appartient à Y , utilisant le fait que $\tilde{s}_2, \tilde{t}_2 \in [-1, 1]$.

Cas 2. Si $(t_1, t_2) = k(s_1, s_2)$, avec $|k| \leq 1$ (si $|k| > 1$, alors il suffit de considérer $(s_1, s_2) = k^{-1}(t_1, t_2)$), nous avons

$$\begin{aligned} \xi &= \lambda E_\theta \otimes (s_1 \alpha + k s_1 \beta) + (1 - \lambda) E_\varphi \otimes (s_2 \alpha + k s_2 \beta) \\ &= (\lambda s_1 E_\theta + (1 - \lambda) s_2 E_\varphi) \otimes (\alpha + k \beta) \\ &= r E_\psi \otimes (\alpha + k \beta) \\ &= E_\psi \otimes (r \alpha + r k \beta) \in Y, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme 10.3, $-1 \leq k \leq 1$ et

$$0 \leq r \leq \lambda|s_1| + (1 - \lambda)|s_2| \leq 1.$$

Etape 3. Il est évident que

$$\text{int R co}(E) = SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}.$$

En particulier, si $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0$, alors

$$\text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\} \neq \emptyset,$$

d'où

$$\text{int R co}(E) \neq \emptyset.$$

□

Corollaire 11.6. Sous les mêmes hypothèses que précédemment,

$$\text{R co}(E) = SO(2) \{ \xi = sA + tR_\psi B : \psi \in] - \pi, \pi], 0 \leq s, t, t + s \leq 1, \det(\xi) = 0 \}.$$

Remarque 11.7. Cette caractérisation est exactement celle de Sverak pour le cas

$$\det(A) = \det(B) > 0.$$

Voir [10], théorème 7.44.

Démonstration. Soient $A = e_1 \otimes \alpha$, $B = e_1 \otimes \beta$. Posons

$$\begin{aligned} Y &:= SO(2) \{ \xi = sA + tR_\psi B : \psi \in] - \pi, \pi], 0 \leq s, t, t + s \leq 1, \det(\xi) = 0 \} \\ &= SO(2) \{ \xi = se_1 \otimes \alpha + tE_\psi \otimes \beta : \psi \in] - \pi, \pi], 0 \leq s, t, t + s \leq 1, \det(\xi) = 0 \}. \end{aligned}$$

Soit $\xi = R_\theta (se_1 \otimes \alpha + tE_\psi \otimes \beta) \in Y$. Alors

$$\det(\xi) = st(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \sin(\psi).$$

On a donc

$$\det(\xi) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \text{ ou } t = 0, \\ \psi \in \{0, \pi\}, \\ \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0. \end{cases}$$

A partir de ces propriétés et avec le théorème 11.4, on vérifie facilement que $Y = \text{R co}(E)$.

□

11.2 Le problème de Dirichlet

Nous allons maintenant discuter de l'existence de solutions pour le problème de Dirichlet (11.1). Par les résultats de la section précédente, il suffit de considérer des matrices de la forme

$$A = e_1 \otimes \alpha, \quad B = e_1 \otimes \beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^2.$$

Nous allons montrer qu'il existe des solutions affines par morceaux non-triviales si les vecteurs α, β ne sont pas colinéaires. La preuve est dans le même esprit que celle du théorème 10.11, qui consiste à se réduire au cas scalaire.

Théorème 11.8. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné, et $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ deux matrices non-triviales rang-1-connectées, avec

$$A = e_1 \otimes \alpha, \quad B = e_1 \otimes \beta, \quad \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

Soit $u_0 \in \text{Aff}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\nabla u_0 \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \cup SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}).$$

Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B & \text{presque partout dans } \Omega \\ u = u_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.3)$$

admet une solution $u = (u_1, u_2) \in \text{Loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^2)$.

Remarque 11.9. Il n'est pas sûr que la condition

$$\nabla u_0 \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \cup SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}).$$

soit nécessaire.

Démonstration. Notons $u_0 = (u_0^{(1)}, u_0^{(2)})$. Si $\nabla u_0 \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$, on a trivialement $u = u_0$ sur $\overline{\Omega}$. Supposons donc que

$$\nabla u_0 = R_\theta e_1 \otimes c \in SO(2)e_1 \otimes \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}),$$

avec $c = s\alpha + t\beta$, $-1 < s, t, s+t < 1$. Sans perte de généralité, quitte à effectuer une rotation sur la solution, on peut supposer que $\theta = 0$, d'où

$$\nabla u_0 = e_1 \otimes c, \quad \nabla u_0^{(1)} = c \in \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\}) \neq \emptyset.$$

Considérons le problème scalaire

$$\begin{cases} \nabla u_1 \in \{\pm\alpha, \pm\beta\} & \text{presque partout dans } \Omega \\ u_1 = u_0^{(1)} & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (11.4)$$

Puisque $c \in \text{int co}(\{\pm\alpha, \pm\beta\})$, le problème (11.4) admet une solution

$$u_1 \in \text{Loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega})$$

par le théorème 9.31, avec $E = \{\pm\alpha, \pm\beta\}$. Posant $u_2(x) := u_0^{(2)}(x)$ et $u := (u_1, u_2)$, nous avons bien que $u \in \text{Loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^2)$,

$$\nabla u \in \left\{ \pm \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \{\pm A, \pm B\} \subset \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B$$

et $u = u_0$ sur $\partial\Omega$. □

Pour illustrer le résultat d'existence ci-dessus, nous donnons ici une preuve entièrement constructive du cas scalaire (théorème 9.31) en dimension 2, pour une donnée de bord nulle.

Notation 11.10. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ non-parallèles, c'est-à-dire

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0.$$

Posons

$$P_1 := \frac{1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}(\alpha_2 - \beta_2, -\alpha_1 + \beta_1), \quad P_2 := \frac{1}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1}(\alpha_2 + \beta_2, -\alpha_1 - \beta_1)$$

et $P \subset \mathbb{R}^2$ le parallélogramme ayant pour sommets $\pm P_1$ et $\pm P_2$. Pour tout $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$, on pose également

$$G(c, r) := rP + c.$$

Notons que

$$\text{diam } G(c, r) = 2r \max\{|P_1|, |P_2|\}, \quad \forall c \in \mathbb{R}^2, r > 0.$$

Lemme 11.11. Soient $c \in \mathbb{R}^2$, $r > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 \neq 0.$$

Alors la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par

$$v_c^r(x) := r - \max\{|\langle \alpha, x - c \rangle|, |\langle \beta, x - c \rangle|\}$$

est solution du problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla v \in \{\pm\alpha, \pm\beta\} & \text{presque partout dans } G(c, r) \\ v = 0 & \text{sur } \partial G(c, r). \end{cases} \quad (11.5)$$

Remarque 11.12.

- (i) Le lemme peut facilement se généraliser pour des données de bord affines u_0 telles que

$$\nabla u_0 \in \text{int co}\{\pm\alpha, \pm\beta\},$$

moyennant quelques modifications sur les objets construits dans la preuve. Le choix $u_0 \equiv 0$ permet d'alléger les équations.

- (ii) En choisissant $\alpha = e_1$, $\beta = e_2$, nous avons par exemple la solution

$$v_0^1(x) = 1 - \max\{|x_1|, |x_2|\}$$

sur $G(0, 1)$ le parallélogramme ayant pour sommets $\pm(1, 1)$ et $\pm(1, -1)$.

Démonstration. Il est évident que $\nabla v_c^r \in \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ partout sur \mathbb{R}^2 sauf sur les deux droites $\langle \alpha \pm \beta, x - c \rangle = 0$. Ensuite, par construction, on a $v_c^r(x) = 0$ si et seulement si

$$\begin{cases} \langle \alpha, x - c \rangle = r & \text{quand } \langle \alpha - \beta, x - c \rangle \geq 0, \langle \alpha + \beta, x - c \rangle \geq 0, \\ \langle \alpha, x - c \rangle = -r & \text{quand } \langle \alpha - \beta, x - c \rangle \leq 0, \langle \alpha + \beta, x - c \rangle \leq 0, \\ \langle \beta, x - c \rangle = r & \text{quand } \langle \alpha - \beta, x - c \rangle \leq 0, \langle \alpha + \beta, x - c \rangle \geq 0, \\ \langle \beta, x - c \rangle = -r & \text{quand } \langle \alpha - \beta, x - c \rangle \geq 0, \langle \alpha + \beta, x - c \rangle \leq 0. \end{cases}$$

Comme α, β ne sont pas colinéaires, alors les droites

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : \langle \alpha, x - c \rangle = r\} \quad \text{et} \quad \{x \in \mathbb{R}^2 : \langle \beta, x - c \rangle = r\}$$

s'intersectent en quatre points satisfaisant les quatre équations

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} (x - c) = \pm \begin{pmatrix} r \\ r \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} (x - c) = \pm \begin{pmatrix} -r \\ r \end{pmatrix},$$

dont les solutions sont exactement $\pm(rP_1 + c)$, $\pm(rP_2 + c)$, ce qui correspond bien au parallélogramme $G(c, r) = rP + c$. \square

La généralisation de ce lemme à un domaine borné s'obtient grâce au théorème de recouvrement de Vitali (voir [15], théorème 10.3 et corollaire 10.6).

Théorème 11.13 (Théorème de recouvrement de Vitali). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné, et $G \subset \mathbb{R}^n$ compact et de mesure non-nulle. Soit

$$\mathcal{G} := \{c + rG : c \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$$

tel que pour presque tout $x \in \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{G} \in \mathcal{G}$ tel que $x \in \tilde{G} \subset B(x, \varepsilon)$. Alors Ω peut être recouvert, à un sous-ensemble de mesure nulle près, par une collection au plus dénombrable d'éléments disjoints de \mathcal{G} ; plus précisément, il existe une suite $G_k \subset \mathcal{G}$, $k \in \mathbb{N}$ telle que

$$\begin{cases} G_k \subset \Omega, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ G_k \cap G_l = \emptyset, & \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l, \\ \text{mes}(\Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k) = 0. \end{cases}$$

Théorème 11.14. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et borné, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1 \neq 0.$$

Alors le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \nabla v \in \{\pm\alpha, \pm\beta\} & \text{presque partout dans } \Omega \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (11.6)$$

admet une solution $v \in \text{loc Aff}_{\text{morc}}(\overline{\Omega})$.

Démonstration. En utilisant les notations 11.10, on pose

$$\mathcal{G} := \{G(c, r) : c \in \mathbb{R}^2, r > 0\}.$$

Montrons que l'on peut recouvrir Ω par des éléments de \mathcal{G} , à un sous-ensemble de mesure nulle près. Puisque

$$\text{diam } G(c, r) = 2r \max\{|P_1|, |P_2|\}, \quad \forall c \in \mathbb{R}^2, r > 0.$$

Ainsi, pour tout $x \in \Omega$ et $\varepsilon > 0$, il existe $r > 0$ suffisamment petit pour que

$$x \in G(x, r) \subset B(x, \varepsilon) \subset \Omega.$$

Ainsi, par le théorème de recouvrement de Vitalli, il existe deux suites $\{c_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ et $\{r_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\begin{cases} G(c_k, r_k) \subset \Omega, & \forall k \in \mathbb{N}, \\ G(c_k, r_k) \cap G(c_l, r_l) = \emptyset, & \forall k, l \in \mathbb{N}, k \neq l, \\ \text{mes}(\Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G(c_k, r_k)) = 0. \end{cases}$$

Ensuite, par le lemme 11.11, pour tout $G(c_k, r_k)$, il existe une solution

$$v_k \in \text{Aff}_{\text{morc}}(G(c_k, r_k))$$

au problème

$$\begin{cases} \nabla v \in \{\pm\alpha, \pm\beta\} & \text{presque partout dans } G(c_k, r_k) \\ v = 0 & \text{sur } \partial G(c_k, r_k). \end{cases} \quad (11.7)$$

Posons

$$\bar{v}(x) := \begin{cases} v_k(x) & : x \in G(c_k, r_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0 & : x \in \Omega \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G(c_k, r_k). \end{cases}$$

Par construction, $\bar{v} \in \text{loc Aff}_{\text{morc}}(\Omega)$ et est solution de (11.6). \square

Nous finissons ce chapitre avec l'énoncé d'un résultat de Dacorogna-Marcellini-Paolini [22] donnant des conditions nécessaires sur les lignes de discontinuité d'une solution affine par morceaux dans un domaine. Il s'agit de l'analogue dégénéré des théorèmes 9.11 et 10.15.

Théorème 11.15. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ tels que $\det(A) = \det(B) = 0$ et

$$A = e_1 \otimes \alpha, \quad B = e_1 \otimes \beta.$$

Soit $u \in \text{Aff}_{\text{morc}}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^2)$ telle que

$$\nabla u \in \mathbb{S}_A \cup \mathbb{S}_B \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Alors les lignes de discontinuité de u sont des segments se comportant suivant l'un des trois cas suivants.

Cas 1. Si α et β ne sont pas collinéaires, alors les lignes de discontinuité sont perpendiculaires aux quatre vecteurs $\alpha, \beta, \alpha + \beta$ et $\alpha - \beta$. Plus précisément, le gradient change de valeurs dans le même puits \mathbb{S}_A ou \mathbb{S}_B si u traverse respectivement les lignes perpendiculaires à α ou β . Si les deux autres lignes sont traversées, alors le gradient passe du puits \mathbb{S}_A à \mathbb{S}_B et vice-versa.

Cas 2. Si α et β sont collinéaires et $\alpha \neq 0$ (ou $\beta \neq 0$), alors il n'y a qu'une ligne de discontinuité possible, perpendiculaire à α (ou β).

Cas 3. Si $\alpha = \beta = 0$, alors u est constant sur chaque composante connexe de Ω .

Troisième partie

Annexes

ANNEXE A

ESPACES DE HÖLDER

Dans ce chapitre, nous donnons la définition des espaces de fonctions de Hölder et énonçons plusieurs propriétés importantes utilisées dans ce travail. Notre référence est Csato-Dacorogna-Kneuss [9], chapitre 16.

A.1 Définitions

Nous commençons par rappeler la définition des espaces C^r .

Définition A.1 (Espaces C^r). Soit $r \geq 0$ un entier et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert.

- (i) $C^0(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continues.
- (ii) $C^r(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ayant toutes leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre r continues ; c'est-à-dire $D^a f \in C^0(\Omega)$ pour tout $a \in \mathcal{A}_m$, $0 \leq m \leq r$, où \mathcal{A}_m est l'ensemble des multi-indices d'ordre m . Nous posons également $\nabla^m f = \{D^a f\}_{a \in \mathcal{A}_m}$.
- (iii) $C^0(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ continues et *bornées*. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} := \sup_{x \in \overline{\Omega}} \{|f(x)|\}.$$

- (iv) $C^r(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions bornées de $C^r(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre r peuvent être étendues continuellement sur $\overline{\Omega}$ et bornées. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{C^r(\overline{\Omega})} := \sum_{m=0}^r \|\nabla^m f\|_{C^0(\overline{\Omega})}.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettons la dépendance en $\overline{\Omega}$ et écrivons simplement

$$\|f\|_{C^r} = \sum_{m=0}^r \|\nabla^m f\|_{C^0}.$$

- (v) $C_{\text{loc}}^r(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^r(K)$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

Nous donnons maintenant la définition des espaces de Hölder.

Définition A.2 (Espaces $C^{r,\alpha}$). Soient un sous-ensemble $D \subset \mathbb{R}^n$, une fonction $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $0 < \alpha \leq 1$. On définit la quantité

$$[f]_{C^{0,\alpha}(D)} := \sup_{\substack{x,y \in D \\ x \neq y}} \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha} \right\}.$$

Soient un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, et un entier $r \geq 0$. Nous définissons les *espaces de Hölder* comme étant les espaces de fonctions suivants.

- (i) $C^{0,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\Omega)$ telles que

$$[f]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty,$$

pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

- (ii) $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^0(\overline{\Omega})$ telles que

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^0(\overline{\Omega})} + [f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty.$$

S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous omettons la dépendante en $\overline{\Omega}$ et écrivons simplement

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}} := \|f\|_{C^0} + [f]_{C^{0,\alpha}}.$$

- (iii) $C^{r,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^r(\Omega)$ telles que

$$[D^a f]_{C^{0,\alpha}(K)} < \infty,$$

pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$ et pour tout multi-indice $a \in \mathcal{A}_r$.

- (iv) $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions $f \in C^r(\overline{\Omega})$ telles que

$$[D^a f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} < \infty,$$

pour tout multi-indice $a \in \mathcal{A}_r$. Nous munissons cet espace de la norme

$$\|f\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} := \|f\|_{C^r(\overline{\Omega})} + \max_{a \in \mathcal{A}_r} [D^a f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})}.$$

La plupart du temps, nous écrivons

$$[\nabla^r f]_{C^{0,\alpha}} = \max_{a \in \mathcal{A}_r} [D^a f]_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})},$$

d'où la notation

$$\|f\|_{C^{r,\alpha}} = \|f\|_{C^r} + [\nabla^r f]_{C^{0,\alpha}}.$$

- (v) $C_{\text{loc}}^{r,\alpha}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $C^{r,\alpha}(K)$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset \Omega$.

Les fonctions de classe $C^{0,\alpha}$ sont dites *continues au sens de Hölder* (ou simplement *Hölder-continues* ou encore *hölderiennes*).

Remarque A.3.

- (i) L'espace $C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$, muni de la norme $\|f\|_{C^{r,\alpha}}$, est un espace de Banach.
- (ii) Pour $\alpha = 0$, on notera $C^{r,0}(\overline{\Omega}) = C^r(\overline{\Omega})$, c'est à dire que les fonctions hölderiennes de paramètre 0 sont identifiées avec les fonctions continues usuelles. Dans ce cas, nous convenons que

$$[f]_{C^{0,0}} = 0 \quad \text{et} \quad \|f\|_{C^{0,0}} = \|f\|_{C^0}$$

et, pour $r \geq 1$,

$$\|f\|_{C^{r,0}} = \|f\|_{C^r}.$$

- (iii) Pour $\alpha = 1$, l'ensemble $C^{0,1}(\overline{\Omega})$ correspond à l'espace des *fonctions lipschitziennes*, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions u pour lesquelles il existe une constante $L > 0$ telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq L|x - y|, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}.$$

- (iv) Quand $\Omega = \mathbb{R}^n$, nous convenons que l'espace $C^{r,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ doit être compris comme $C^{r,\alpha}(\overline{\mathbb{R}^n})$, ce qui implique que toutes les dérivées de f sont bornées dans \mathbb{R}^n .

A.2 Propriétés

Théorème A.4 (Inclusions). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et lipschitzien, $r \geq 0$ un entier et $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. Alors les inclusions suivantes sont vraies :

$$C^r(\overline{\Omega}) \supset C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \supset C^{r,\beta}(\overline{\Omega}) \supset C^{r,1}(\overline{\Omega}) \supset C^{r+1}(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. Voir [9], corollaire 16.13. □

Les deux résultats suivants donnent une propriété de semi-continuité inférieure pour les normes hölderiennes.

Proposition A.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et lipschitzien, $r \in \mathbb{N}$ et $0 < \alpha \leq 1$. Soient $R > 0$ et

$$B_R := \left\{ f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) : \|f\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq R \right\}.$$

Pour toute suite de fonctions $\{f_\nu\} \subset B_R$ telle que

$$f_\nu \rightarrow f \text{ dans } C^0(\overline{\Omega}) \text{ quand } \nu \rightarrow \infty,$$

alors

$$f \in B_R \quad \text{et} \quad \|f\|_{C^{r,\alpha}} \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \|f_\nu\|_{C^{r,\alpha}}.$$

Démonstration. Voir [9], proposition 16.23. □

Remarque A.6. Si Ω est non-borné ou $\alpha = 0$, la proposition A.5 est fausse.

Théorème A.7 (Produit). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et lipschitzien, $r \geq 0$ un entier et $0 \leq \alpha \leq 1$. Alors il existe une constante $C = C(r, \Omega)$ telle que tout $f, g \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})$ satisfait l'inégalité

$$\|fg\|_{C^{r, \alpha}} \leq C (\|f\|_{C^{r, \alpha}} \|g\|_{C^0} + \|f\|_{C^0} \|g\|_{C^{r, \alpha}}).$$

Démonstration. [9], théorème 16.28. □

Théorème A.8 (Composition). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $O \subset \mathbb{R}^m$ ouverts, bornés et lipschitziens, $r \geq 0$ un entier et $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

(i) Si $r = 0$, alors tout $g \in C^{0, \alpha}(\overline{O})$ et $f \in C^{0, \beta}(\overline{\Omega}; \overline{O})$ satisfait l'inégalité

$$\|g \circ f\|_{C^{0, \alpha\beta}(\overline{\Omega})} \leq \|g\|_{C^{0, \alpha}(\overline{O})} \|f\|_{C^{0, \beta}(\overline{\Omega})}^\alpha + \|g\|_{C^0(\overline{O})}.$$

En particulier, si

$$\|f\|_{C^{0, \beta}} \leq c,$$

alors

$$\|g \circ f\|_{C^{0, \alpha\beta}(\overline{\Omega})} \leq C \|g\|_{C^{0, \alpha}(\overline{O})},$$

avec $C = C(c, \Omega, O) > 0$.

(ii) Si $r \geq 1$, alors il existe une constante $C = C(r, \Omega, O) > 0$ telle que tout $g \in C^{r, \alpha}(\overline{O})$ et $f \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O})$ satisfait l'inégalité

$$\|g \circ f\|_{C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \left[\|g\|_{C^{r, \alpha}(\overline{O})} \|f\|_{C^1(\overline{\Omega})}^{r+\alpha} + \|g\|_{C^1(\overline{O})} \|f\|_{C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})} + \|g\|_{C^0(\overline{O})} \right].$$

Démonstration. [9], théorème 16.31. □

Théorème A.9 (Différence de composition). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $O \subset \mathbb{R}^m$ ouverts, bornés et lipschitziens. Soient $r \geq 0$ un entier, $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Soit $c > 0$ une constante

(i) Si $r = 0$, $g \in C^{0, \beta}(\overline{O})$ et $u, v \in C^1(\overline{\Omega}; \overline{O})$ avec

$$\|u\|_{C^1}, \|v\|_{C^1} \leq c,$$

alors il existe une constante $C = C(c, \Omega, O) > 0$ telle que

$$\|g \circ u - g \circ v\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|g\|_{C^{0, \beta}(\overline{O})} \|u - v\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{\beta - \alpha}.$$

(ii) Si $r = 0$, $g \in C^{0, 1}(\overline{O})$ et $u, v \in C^{0, \alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O})$ avec

$$\|u\|_{C^{0, \alpha}}, \|v\|_{C^{0, \alpha}} \leq c,$$

alors il existe une constante $C = C(c, \Omega, O) > 0$ telle que

$$\|g \circ u - g \circ v\|_{C^{0, \alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|g\|_{C^{0, 1}(\overline{O})} \|u - v\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{1 - \alpha}.$$

(iii) Si $r \geq 1$, $g \in C^{r,\beta}(\overline{O})$ et $u, v \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}; \overline{O})$ avec

$$\|u\|_{C^{0,1}}, \|v\|_{C^{0,1}} \leq c,$$

alors il existe une constante $C = C(r, \alpha, \beta, c, \Omega, O) > 0$ telle que

$$\begin{aligned} \|g \circ u - g \circ v\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq C \|g\|_{C^{r,\beta}(\overline{O})} \left(\|u - v\|_{C^0(\overline{\Omega})}^{\beta-\alpha} + \|u - v\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})} \right) \\ &\leq C \|g\|_{C^{r,\beta}(\overline{O})} \left(\|u - v\|_{C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})}^{\beta-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Démonstration. [9], théorème 16.39. □

ANNEXE B

EQUATIONS LINÉAIRES

Nous regroupons ici plusieurs résultats classiques d'existence de solutions pour des équations linéaires.

B.1 L'équation de la divergence

Théorème B.1. Soient $0 < \alpha \leq 1$ et $r \in \mathbb{N}$. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, connexe, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$ et une fonction $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

(a) La fonction f satisfait

$$\int_{\Omega} f(x) dx = 0.$$

(b) Le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div} U = f & \text{dans } \Omega \\ U = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

admet une solution $U \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$. De plus, il existe une correspondance linéaire $f \rightarrow U$ et une constante $K = K(r, \alpha, \Omega) > 0$ telle que

$$\|U\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq K \|f\|_{C^{r,\alpha}}.$$

Démonstration. Voir Csato-Dacorogna-Kneuss [9], théorème 9.2. \square

Remarque B.2. Plus précisément, la correspondance linéaire évoquée au théorème B.1 signifie que si

$$\begin{aligned} X &:= \{U \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n) : U|_{\partial\Omega} = 0\}, \\ Y &:= \left\{f \in C^{r,\alpha} : \int_{\Omega} f(x) dx = 0\right\}, \end{aligned}$$

alors il existe un opérateur linéaire $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$, tel que pour tout $f \in Y$, il existe un unique $U = \mathcal{L}^{-1}f \in X$ satisfaisant l'équation B.1 et

$$\|\mathcal{L}^{-1}f\|_X \leq K \|f\|_Y.$$

B.2 Equations elliptiques du deuxième ordre

Définition B.3. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert et borné et L un opérateur différentiel linéaire de second ordre défini pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ par

$$Lu = Lu(x) := \langle A(x); \nabla^2 u(x) \rangle + \langle b(x); \nabla u(x) \rangle + c(x)u(x), \quad \forall x \in \overline{\Omega}$$

où $A \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^{n \times n})$, $b \in C^0(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $c \in C^0(\overline{\Omega})$ sont des coefficients donnés.

- (i) L est dit (*uniformément*) *elliptique* s'il existe une constante $\lambda > 0$, dite *constante d'ellipticité* de L telle que

$$\left| \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_j^i(x) y_i y_j \right| \geq \lambda |y|^2$$

pour tout $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $x \in \overline{\Omega}$. Autrement dit, le champ matriciel $A(x)$ est uniformément défini positif sur Ω .

- (ii) Soient $r \in \mathbb{N}$ et $0 \leq \alpha \leq 1$ tels que $A, b, c \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})$ et une constante $\Lambda > 0$ telle que

$$\|A\|_{C^{r, \alpha}}, \|b\|_{C^{r, \alpha}}, \|c\|_{C^{r, \alpha}} \leq \Lambda.$$

On appelle Λ la *borne uniforme (supérieure)* de L .

Le problème de Dirichlet

Théorème B.4. Soient

- $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2, \alpha}$;
- des fonctions $f \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$;
- un opérateur elliptique du deuxième ordre L , dont les coefficients A, b, c sont de classe $C^{r, \alpha}$ sur $\overline{\Omega}$ et les constantes $\lambda, \Lambda > 0$ associées.

Soit le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

- (i) *Estimation.* Toute solution $u \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ du problème (B.2) satisfait l'estimation

$$\|u\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K (\|u\|_{C^0} + \|f\|_{C^{r, \alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+2, \alpha}}),$$

où $K = K(r, \alpha, \Omega, \lambda, \Lambda) > 0$ est une constante.

- (ii) *Existence.* Si $c \leq 0$, alors il existe une unique solution $u \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$ au problème (B.2). De plus,

$$\|u\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K (\|\varphi\|_{C^{r+2, \alpha}} + \|f\|_{C^{r, \alpha}}).$$

- (iii) *Alternative.* Si $c > 0$, alors exactement une seule des deux assertions suivante est vraie :

- (a) Le problème (B.2) admet une unique solution dans $C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$.

(b) Le problème homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet des solutions non-triviales qui forment un sous-espace de $C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de dimension finie.

Démonstration. Voir Gilbarg-Trudinger [34], théorèmes 6.6, 6.14, 6.15 et 6.19. \square

Le problème de la dérivée oblique

Théorème B.5. Soient

- $0 < \alpha < 1$, $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+2,\alpha}$;
- des fonctions $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$;
- un opérateur elliptique de second ordre L , dont les coefficients A, b, c appartiennent à $C^{r,\alpha}$ sur $\overline{\Omega}$ et les constantes $\lambda, \Lambda > 0$ associées,
- un opérateur de premier ordre N défini pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$ par

$$Nu := \langle \beta; \nabla u \rangle + \gamma u,$$

avec $\beta \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $\gamma \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\|\beta\|_{C^{r+1,\alpha}}, \|\gamma\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq \Lambda, \quad |\langle \beta; \nu \rangle| \geq \kappa > 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Soit le problème de la dérivée oblique

$$\begin{cases} Lu = f & \text{dans } \Omega \\ Nu = \varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

(i) *Estimation.* Toute solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ du problème (B.3) satisfait l'estimation

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K (\|u\|_{C^0} + \|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}}),$$

où $K = K(r, \alpha, \Omega, \lambda, \Lambda, \kappa) > 0$ est une constante.

(ii) *Existence.* Si c et γ satisfont

$$\begin{cases} c \not\equiv 0 & \text{ou} & \gamma|_{\partial\Omega} \not\equiv 0, \\ c \leq 0 & \text{et} & \gamma|_{\partial\Omega} \geq 0, \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

alors le problème (B.3) admet une unique solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$. De plus,

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K (\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}}).$$

(iii) *Alternative.* Si c et γ ne satisfont pas (B.4), alors exactement une seule des deux assertions suivante est vraie :

- (a) Le problème (B.3) admet une unique solution dans $C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.
- (b) Le problème homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega \\ Nu = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

admet des solutions non-triviales qui forment un sous-espace de $C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de dimension finie.

Démonstration. Voir Gilbarg-Trudinger [34], théorèmes 6.30 et 6.31. \square

Le problème de Neumann

Rappelons d'abord le concept d'alternative de Fredholm (voir [34], section 5.3).

Définition B.6. Soient V_1, V_2 deux espaces normés. Une application $T : V_1 \rightarrow V_2$ est dite *compacte* si pour toute suite $\{x_i\}_{i \in I} \subset V_1$ bornée, la suite $\{Tx_i\}_{i \in I} \subset V_2$ admet une sous-suite convergente.

Théorème B.7 (Alternative de Fredholm). Soient V un espace normé et $T : V \rightarrow V$ une application linéaire compacte. Alors exactement une seule des deux assertions suivantes est vraie :

(a) L'équation homogène

$$x - Tx = 0$$

admet une solution $x \in V \setminus \{0\}$;

(b) Pour tout $y \in V$, l'équation

$$x - Tx = y$$

admet une unique solution $x \in V$. De plus, l'opérateur $(\text{id} - T)^{-1}$ est borné.

Remarque B.8.

- (i) Il est facile de voir que les deux assertions s'excluent mutuellement (prendre $y = 0$ dans (b)).
- (ii) L'alternative de Fredholm est notamment appliquées aux EDP dont l'existence d'une solution unique n'est pas assurée pour des raisons de signe des coefficients.

Théorème B.9. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, connexe et de classe $C^{r+2, \alpha}$;
- des fonction $f \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})$ et $g, \varphi \in C^{r+1, \alpha}(\overline{\Omega})$, avec $g > 0$, telles que

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g\varphi ; \tag{B.5}$$

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|g\|_{C^{r+1, \alpha}} \leq \lambda.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \text{div}(g\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{dans } \partial\Omega \end{cases} \tag{B.6}$$

admet une solution $u \in C^{r+2, \alpha}(\overline{\Omega})$, unique à une constante près. De plus, toute solution satisfait l'estimation

$$\left\| u - \oint_{\Omega} u \right\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K(\|f\|_{C^{r, \alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1, \alpha}}), \tag{B.7}$$

où $K = K(r, \alpha, \Omega, \lambda) > 0$ et

$$\oint_{\Omega} u := \frac{1}{\text{mes}(\Omega)} \int_{\Omega} u.$$

Démonstration. Cette preuve reprend la démarche effectuée par G. Nardi concernant le problème de Neumann pour l'équation de Poisson (voir [51], [52]).

Partie 1 : existence.

Si $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est solution de (B.6), il est évident que $u + k$ est aussi une solution, pour tout $k \in \mathbb{R}$. Nous allons donc montrer l'existence et l'unicité dans l'espace des solutions à moyenne nulle

$$X := \left\{ u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} u = 0 \right\},$$

via la méthode de l'alternative de Fredholm. La démonstration se déroule en 5 étapes.

Etape 1 : unicité. Montrons d'abord que le problème homogène

$$\begin{cases} \operatorname{div}(g\nabla u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

n'admet que des solutions constantes dans $C^2(\overline{\Omega})$ (et donc dans X). Par le théorème de la divergence, nous avons, pour tout $u \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(g\nabla u)u = \int_{\partial\Omega} gu \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\Omega} g|\nabla u|^2.$$

Si u est solution du problème (B.8), alors il reste

$$\int_{\Omega} g|\nabla u|^2 = 0.$$

Par hypothèse, $g > 0$. Par conséquent on a nécessairement

$$\nabla u(x) = 0, \quad \forall x \in \Omega,$$

d'où u constante. Par conséquent, comme Ω est connexe, la solution triviale $u \equiv 0$ est l'unique solution dans X .

Etape 2. Considérons le problème modifié

$$\begin{cases} \operatorname{div}(g\nabla u) - u = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi & \text{dans } \partial\Omega. \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

Fixons g et posons l'espace de données

$$Y := \left\{ (f, \varphi) \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g\varphi \right\}.$$

Puisque $g > 0$ sur $\overline{\Omega}$, le problème (B.9) est elliptique et satisfait les conditions du théorème B.5 : pour tout $(f, \varphi) \in Y$ il existe une unique solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K (\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}}).$$

De plus, cette solution satisfait

$$\int_{\Omega} u = \int_{\Omega} \operatorname{div}(g\nabla u) - \int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial u}{\partial \nu} - \int_{\partial\Omega} g\varphi = 0,$$

c'est-à-dire $u \in X$.

On peut reformuler ce qui précède de manière fonctionnelle : il existe un opérateur linéaire $L(f, \varphi) : Y \rightarrow X$ bijectif tel que

$$L^{-1}(u) = \left(\operatorname{div}(g \nabla u - u), \frac{\partial u}{\partial \nu} \right), \quad \forall u \in X \quad (\text{B.10})$$

et

$$\|L(f, \varphi)\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K(\|f\|_{C^{r, \alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1, \alpha}}), \quad \forall (f, \varphi) \in Y. \quad (\text{B.11})$$

Etape 3. Soit $v = L(f, \varphi) \in X$ et considérons maintenant l'équation fonctionnelle

$$u + L(u, 0) = v \quad (\text{B.12})$$

avec $u \in X$. Alors (B.12) est équivalent au problème initial (B.6). En effet, en appliquant l'inverse L^{-1} sur les deux membres de (B.12),

$$L^{-1}(u + L(u, 0)) = L^{-1}(u) + (u, 0) = \left(\operatorname{div}(g \nabla u), \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) = (f, \varphi) = L^{-1}(v),$$

où nous avons utilisé la linéarité de L^{-1} et (B.10). En particulier, le problème $u + L(u, 0) = 0$ est équivalent au problème de Neumann homogène.

Il est donc suffisant de montrer que pour tout $v \in X$, il existe une unique solution $u \in X$ pour (B.12).

Etape 4. On définit l'espace de fonctions

$$F := \left\{ f \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega}) : \int f = 0 \right\},$$

et l'opérateur $T : F \rightarrow F$ défini par

$$Tf = L(-f, 0).$$

On remarque que

$$T(F) \subset X \subset F.$$

Montrons que T est un opérateur compact. Soit une suite $\{f_k\}_{k \geq 1} \subset F$ telle que

$$\|f_k\|_{C^{r, \alpha}} \leq M, \quad \forall k \geq 1,$$

et posons $u_k := Tf_k = L(-f_k, 0)$. Alors par (B.11), nous avons pour tout $k \geq 1$

$$\|u_k\|_{C^{r+2, \alpha}} \leq K \|f_k\|_{C^{r, \alpha}} \leq KM,$$

et donc $\{u_k\}$ est une suite bornée dans $C^{r+2, \alpha}$. Par injection compacte des espaces de Hölder (voir [9], théorème 16.22), la suite $\{u_k\}$ admet une sous-suite convergente vers une limite $u \in C^{r, \alpha}(\overline{\Omega})$. Il est facile de voir que $\int_{\Omega} u = 0$, d'où $u \in F$, et donc T est compact.

Etape 5. Nous réécrivons l'équation (B.12) ainsi :

$$u - Tu = v.$$

Puisque T est un opérateur compact, nous pouvons appliquer l'alternative de Fredholm (théorème B.7) :

- (a) soit le problème $u - Tu = 0$ admet au moins une solution $u \in F \setminus \{0\}$;
(b) soit, pour tout $v \in F$, le problème $u - Tu = v$ admet une unique solution $u \in F$.

L'équation $u - Tu = 0$ est équivalente au problème de Neumann homogène (B.8), qui n'admet que la solution triviale dans F (étape 1). Par conséquent, le choix (a) est à rejeter et le choix (b) est vrai. En particulier, pour tout $v \in X \subset F$, l'unique solution appartient à X ; en effet,

$$u = Tu + v \in T(F) + X \subset X + X = X,$$

ce qui achève la preuve de l'existence.

Partie 2 : estimation.

Il est suffisant de montrer l'estimation (B.7) pour une solution à moyenne nulle

$$u \in X = \left\{ u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega}) : \int_{\Omega} u = 0 \right\}.$$

En effet, si $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est solution de (B.6) et

$$\oint_{\Omega} u = 0,$$

alors toutes les autres solutions $u_C = u + C$, $C \in \mathbb{R}$, satisfont

$$\oint_{\Omega} u_C = C \quad \text{et} \quad u_C - \oint_{\Omega} u_C = u.$$

Nous allons donc montrer l'inégalité

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K(\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}}). \quad (\text{B.13})$$

pour tout f et φ satisfaisant la condition (B.5). Supposons *ab absurdo* que (B.13) est fausse ; alors, pour tout entier $k \geq 1$, il existe des fonctions $u_k \in X$, $f_k \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi_k \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\begin{cases} \operatorname{div}(gu_k) = f_k & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_k}{\partial \nu} = \varphi_k & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$\|u_k\|_{C^{r+2,\alpha}} > k(\|f_k\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi_k\|_{C^{r+1,\alpha}}).$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\|u_k\|_{C^{r+2,\alpha}} = 1$, pour tout k , quitte à diviser $\|f_k\|_{C^{r,\alpha}}$ et $\|\varphi_k\|_{C^{r+1,\alpha}}$ par $\|u_k\|_{C^{r+2,\alpha}}$, d'où

$$k(\|f_k\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi_k\|_{C^{r+1,\alpha}}) < 1, \quad \forall k \geq 1.$$

Ceci n'est possible que si $f_k \rightarrow 0$ dans $C^{r,\alpha}$ et $\varphi_k \rightarrow 0$ dans $C^{r+1,\alpha}$. De plus, la suite $\{u_k\}$ est équibornée, et, par le théorème A.4, équicontinue dans $C^2(\overline{\Omega})$. Par le théorème d'Ascoli-Arzelà, $\{u_k\}$ converge (à une sous-suite près) dans $C^2(\overline{\Omega})$ vers une limite u_0 qui satisfait

$$\begin{cases} \operatorname{div}(gu_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{div}(gu_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial u_k}{\partial \nu} = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \int_{\Omega} u_0 = 0. \end{cases}$$

Par l'étape 1 de la partie 1 de la preuve, on a nécessairement $u_0 \equiv 0$, or, par l'estimation donnée par le théorème B.5, nous avons

$$1 = \|u_k\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K(\|u_k\|_{C^0} + \|f_k\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi_k\|_{C^{r+1,\alpha}}) \rightarrow 0,$$

ce qui est absurde. \square

Corollaire B.10. Soient

- un entier $r \geq 0$ et $0 < \alpha < 1$;
- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné, connexe et de classe $C^{2,\alpha}$ et ν sa normale extérieure unité ;
- $f \in C^{r,\alpha}(\overline{\Omega})$ et $\varphi \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ tels que

$$\int_{\Omega} f = \int_{\partial\Omega} \varphi ;$$

- $h \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ et $H \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tels que

$$h = \nabla H \quad \text{dans } \overline{\Omega} ;$$

- une constante $\lambda > 0$ telle que

$$\|h\|_{C^{r+1,\alpha}} \leq \lambda.$$

Alors le problème

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\nabla u + hu) = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} + \langle h; \nu \rangle u = \varphi & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^{r+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ telle que

$$\int_{\Omega} v = 0.$$

De plus, il existe une constante $K = K(r, \alpha, \Omega, \lambda) > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^{r+2,\alpha}} \leq K(\|f\|_{C^{r,\alpha}} + \|\varphi\|_{C^{r+1,\alpha}}).$$

Démonstration. En effectuant le changement de variable $v = e^{-H}w$, nous obtenons le problème équivalent

$$\begin{cases} \operatorname{div}(e^{-H}\nabla w) = f & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = e^H\varphi & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Puisque nous avons la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} \operatorname{div}(e^{-H}\nabla w) = \int_{\partial\Omega} e^{-H}e^H\varphi = \int_{\partial\Omega} \varphi,$$

et $e^{-H} > 0$, il suffit donc d'appliquer le théorème B.9 pour avoir la conclusion. \square

B.3 L'équation des ondes

Théorème B.11. Soient des entiers $1 \leq n \leq 3$ et $m := \lfloor \frac{n+2}{2} \rfloor$, un scalaire $T > 0$ et des fonctions $f \in C^m(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, $g \in C^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^m(\mathbb{R}^n)$. Alors l'équation des ondes

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f(x, t) & : (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(x, 0) = g(x), \quad u_t(x, 0) = h(x) & : x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ donnée par :

si $n = 1$, la *formule de d'Alembert*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} (g(x+t) + g(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} h(y) dy \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y, s) dy; \end{aligned}$$

si $n = 2$, la *formule de Poisson*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi t} \int_{B_t(x)} \frac{t h(y) + g(y) + \langle \nabla g(y); y - x \rangle}{\sqrt{t^2 - |y - x|^2}} dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^t ds \int_{B_s(x)} \frac{f(y, s-t)}{\sqrt{s^2 - |y - x|^2}} dy; \end{aligned}$$

si $n = 3$, la *formule de Kirchhoff*

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \oint_{\partial B_t(x)} [t h(y) + g(y) + \langle \nabla g(y); y - x \rangle] d\sigma(y) \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_{B_t(x)} \frac{f(y, t - |x - y|)}{|y - x|} dy, \end{aligned}$$

où

$$B_t(x) := \{y \in \mathbb{R}^n : |x - y| < t\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0.$$

En particulier, il existe une constante $K = K(T) > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^2} \leq K (\|f\|_{C^m} + \|g\|_{C^{m+1}} + \|h\|_{C^m}). \quad (\text{B.14})$$

Démonstration. Ces résultats sont classiques. Voir par exemple Evans [29], section 2.4 ou John [41], sections 2.4 et 5.1. \square

Remarque B.12.

- (i) Quand $n > 3$, nous disposons de formules similaires (voir [29]), par contre, la régularité minimale requise des données f, g, h croît avec n .
- (ii) Quand les données sont plus régulières, alors la solution est plus régulière. Autrement dit, pour $r > 0$ entier, si $f \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$, $g \in C^{r+m+1}(\mathbb{R}^n)$ et $h \in C^{r+m}(\mathbb{R}^n)$, alors $u \in C^{r+2}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$

B.4 Un problème sur le bord

Voici un résultat d'existence pour une équation constituée uniquement de conditions au bord.

Théorème B.13. Soient un entier $r \geq 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, borné et de classe $C^{r+1,\alpha}$. Alors pour tout $\varphi \in C^{r,\alpha}(\partial\Omega)$, il existe une fonction $u \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaisant

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \varphi \quad \text{et} \quad u \equiv 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \quad (\text{B.15})$$

De plus, il existe une constante $C = C(r, \Omega) > 0$ telle que

$$\|u\|_{C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C \|\varphi\|_{C^{r,\alpha}(\partial\Omega)}.$$

Démonstration. Voir [9], lemme 8.8. □

Remarque B.14. La construction $\varphi \rightarrow u$ est linéaire, dans le sens que si

$$X = \{u \in C^{r+1,\alpha}(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} \equiv 0\}, \quad Y = C^{r,\alpha}(\partial\Omega),$$

alors il existe un opérateur linéaire $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$ tel que pour tout $\varphi \in Y$, il existe un unique $u = \mathcal{L}^{-1}\varphi \in X$ satisfaisant (B.15) et

$$\|\mathcal{L}^{-1}\varphi\|_Y \leq C \|\varphi\|_Y.$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Brenier Y., *Polar Factorization and Monotone Rearrangement of Vector Values Functions*, Comm. Pure Appl. Math. **44** (1991), 375-417.
- [2] Bressan A. and Flores F., *On total differential inclusions*, Rend. Semin. Mat. Univ. Padova **92** (1994), 9-16.
- [3] Caffarelli L., *Boundary regularity of maps with convex potentials I*, Comm. Pure Appl. Math. **45** (1992), 1141-1151.
- [4] Caffarelli L., *Boundary regularity of maps with convex potentials II*, Ann. of Math. **144** (1996), 453-496.
- [5] Caffarelli L., Nirenberg L. and Spruck J., *Dirichlet Problems for nonlinear elliptic equations I, Monge-Ampère equations*, Comm. Pure Appl. Math. **37** (1984), 369-402.
- [6] Caffarelli L., Nirenberg L. and Spruck J., *Dirichlet Problems for nonlinear elliptic equations III, Functions of the eigenvalues of the Hessian equations*, Comm. Pure Appl. Math. **155** (1985), 261-301.
- [7] Cellina A., *On minima of a functional of the gradient : sufficient conditions*, Nonlinear Anal. **20** (1993), 343-347.
- [8] Cellina P. and Perrotta S., *Functions with prescribed singular values of the gradient*, Nonlinear Differential Equations Appl. **5** (1998), 383-396.
- [9] Csato G., Dacorogna B. and Kneuss O., *The Pullback Equation for Differential Forms*, Birkhäuser, 2012.
- [10] Dacorogna B., *Direct methods in the calculus of variations*, Second edition, Springer-Verlag, New York, 2007.
- [11] Dacorogna B., *Introduction to the calculus of variations*, Third edition, Imperial College Press, London, 2015.
- [12] Dacorogna B. and Marcellini P., *Théorème d'existence dans le cas scalaire et vectoriel pour les équations de Hamilton-Jacobi*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322** (1996), 237-240.

- [13] Dacorogna B. and Marcellini P., *Sur le problème de Cauchy-Dirichlet pour les systèmes d'équations non linéaires du premier ordre*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), 599-602.
- [14] Dacorogna B. and Marcellini P., *General existence theorems for Hamilton-Jacobi equations in the scalar and vectorial case*, Acta Math. **178** (1997), 1-37.
- [15] Dacorogna B. and Marcellini P., *Implicit partial differential equations*, Birkhäuser, Boston, 1999.
- [16] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *An explicit solution to a system of implicit differential equations*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **25** (2008), 163-171.
- [17] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *Lipschitz-continuous local isometric immersions : rigid maps and origami*, J. Math. Pures Appl. **90** (2008), 66-81.
- [18] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *On the n -dimensional Dirichlet problem for isometric maps*, J. Funct. Anal. **255** (2008), 3274-3280.
- [19] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *Functions with orthogonal Hessian*, Differential Integral Equations **23** (2010), 51-60.
- [20] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *Origami and partial differential equations*, Notices Amer. Math. Soc. **57** (2010), 598-606.
- [21] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *The two well problem for piecewise affine maps*, Adv. Differential Equations **17** (2012), 531-544.
- [22] Dacorogna B., Marcellini P. and Paolini E., *The degenerate two well problem for piecewise affine maps*, Nonlin. Diff. Equ. and Appl. **20** (2013), 345-359.
- [23] Dacorogna B. and Moser J., *On a partial differential equation involving the Jacobian determinant*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **7** (1990), 1-26.
- [24] Dacorogna B. and Ribeiro A.M., *Existence of solutions for some implicit pdes and applications to variational integrals involving quasilinear functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **134** (2004), 907-921.
- [25] Dacorogna B. and Tanteri C., *On the different convex hulls of sets involving singular values*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **128** (1998), 1261-1280.
- [26] Dacorogna B. and Tanteri C., *Implicit partial differential equations and the constraints of nonlinear elasticity*, J. Math. Pures Appl. **81** (2002), 311-341.
- [27] De Blasi F.S. and Pianigiani G., *The Baire method for the prescribed singular values problem*, J. London Math. Soc. **70** (2004), 719-734.
- [28] Delanoë P., *Classical solvability in dimension two of the second boundary value problem associated with the Monge-Ampère operator*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **8** (1991), 443-457.
- [29] Evans, L.C., *Partial Differential Equation*, Second edition, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2010.
- [30] Evans L.C., Gangbo W., *Differential equations methods for the Monge-Kantorovich mass transfer problem*, Mem. Am. Math. Soc. **137** (1999) viii+66 pp

- [31] Friesecke G., *A Necessary and sufficient condition for nonattainment and formation of microstructure almost everywhere in scalar variational problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **124** (1994), 437-471.
- [32] Gangbo W., *The Monge Transfer Problem and its Applications*, Contemp. Math. **226** (1999), 79-104.
- [33] Giannetti F. and Pisante G., *Existence of solutions for some quasilinear PDEs*, Z. Anal. Anwend. **28** (2009), 47-56.
- [34] Gilbarg D. and Trudinger N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Reprint of the 1998 edition, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [35] Gromov M., *Partial differential relations*, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [36] Guan. B., *The Dirichlet Problem for Monge-Ampère equations in non-convex domains and spacelike hypersurfaces of constant Gauss curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **350** (1998), 4955-4971.
- [37] Ishii H., *Fully nonlinear oblique derivative problems for nonlinear second-order elliptic PDEs*, Duke Math. J. **62** (1991), 633-661.
- [38] Iwaniew T., Verchota G. and Vogel A., *The failure of rank one connections*, Arch. Ration. Mech. Anal. **163** (2002), 125-169.
- [39] Jenkins H. and Serrin J., *The Dirichlet Problem for the Minimal Surface Equation in Higher Dimensions*, J. Reine Angew. Math. **229** (1968), 170-187.
- [40] Jiang F., Trudinger N.S. and Yang X.P., *On the Dirichlet problem for Monge-Ampère type equations*, Calc. Var. Part. Diff. Eqns **49** (2014), 1223-1236.
- [41] John F., *Partial differential relations*, Fourth Edition, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [42] John F., *Nonlinear Wave Equations : Formation of Singularities*, University Lecture Series **2**, AMS, Providence, RI (1990), viii+64.
- [43] Krantz S.G. and Parks H.R., *The Geometry of Domains in Space*, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.
- [44] Krylov N.V., *Fully Nonlinear Second Order Elliptic Equations : Recent Development*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **25** (1997), 569-595.
- [45] Kutev N.D., *On the solvability of Monge-Ampère type equations in nonuniformly convex domains*, Math. Z. **208** (1991), 167-176.
- [46] Lieberman G.M., *Solutions of Singular Elliptic Equations via the Oblique Derivative Problem*, Ann. Univ. Ferrara **57** (2011), 121-172.
- [47] Lieberman G.M., *Oblique derivative problems for elliptic equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2013, xvi+509.
- [48] Lieberman G.M. and Trudinger N.S., *Nonlinear oblique boundary value problems for nonlinear elliptic equations*, Trans. Amer. Math. Soc. **295** No. 2 (1986), 509-546.
- [49] Müller S. and Sverak V., *Attainment results for the two-well problem by convex integration*, ed Jost J., International Press, 1996, 239-251.
- [50] Müller S. and Sverak V., *Convex intergration with constraints and applications to phase transisions and partial differential equations*, J. European Math. Soc. **1** (1999), 393-422.

- [51] Nardi G., *Résolubilité au sens classique et au sens des distributions de quelques problèmes elliptiques*, Projet de Master, EPFL, 2007.
- [52] Nardi G., *Schauder estimate for solutions of Poisson's equation with Neumann boundary condition*, arXiv, arXiv :1302.4103v2 [math.AP], 2013.
- [53] Pogorelov A.V., *Monge-Ampère equations of elliptic type*, Groningen, Noordhoff, 1964.
- [54] Safonov M.V., *On the oblique derivative problem for second order elliptic equations*, Comm. Part. Diff. Eqns **20** (1995), 1349–1367.
- [55] Sogge, C.D., *Lectures on non-linear wave equations, Second edition*, International Press, Boston, MA, 2008. x+205 pp.
- [56] Strauss, W.A., *Nonlinear wave equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics **73**, Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1989. x+91 pp.
- [57] Sverak V., *On the problem of two wells*, Microstructure and phase transitions, IMA Volumes on Mathematics and Its Applications **54**, Springer-Verlag, New York, 1993, 183-189.
- [58] Trudinger N.S., *On the Dirichlet Problem for Hessian Equations*, Acta Math. **175** (1995), 151-164.
- [59] Trudinger N.S., *On the Local Theory of Prescribed Jacobian Equations*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **34** (2014), 1663–1681.
- [60] Trudinger N.S. and Wang X.J., *Boundary regularity for the Monge-Ampère and affine maximal surface equation*, Ann. Math. **167** (2008), 993-1028.
- [61] Trudinger N.S. and Wang X.J., *The Monge-Ampère equation and its geometric applications*, Handbook of Geometric Analysis, International Press **1** (2008), 467-524.
- [62] Trudinger N.S. and Wang X.J., *On the second boundary value problem for Monge-Ampère type equations and optimal transportation*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. **8** (2009), 143-174.
- [63] Urbas J., *Nonlinear Oblique Boundary Value Problems for Hessian Equations in Two Dimensions*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1995), 507-575.
- [64] Urbas J., *Nonlinear Oblique Boundary Value Problems for Two Dimensional Curvature Equations*, Adv. Differential Equations **1** (1996), 115-124.
- [65] Urbas J., *On the second boundary value problem for equations of Monge-Ampère type*, J. Reine Angew. Math. **487** (1997), 115-124.
- [66] Urbas J., *Nonlinear Oblique Boundary Value Problems for equations of Monge-Ampère type*, Calc. Var. Partial Differential Equations **7** (1998), 19-39.
- [67] Urbas J., *Mass Transfer problems*, Sonderforschungsbereich **256** Nichtlineare Partielle Differentialgleichungen, Bonn, 1998.
- [68] Urbas J., *Some interior regularity results for solutions of Hessian equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **11** (2000), 1–31.
- [69] Urbas J., *The Second Boundary Value Problem for a Class of Hessian Equations*, Comm. in Partial Differential Equations **26** (2001), 859-882.

- [70] Urbas J., *The Dirichlet problem for the equation of prescribed scalar curvature in Minkowski space*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), 307–316.
- [71] Urbas J., *A Remark on Minimal Lagrangian Diffeomorphisms and the Monge-Ampère equation*, Bull. Austral. Math. Soc. **76** (2007), 215-218.
- [72] Wang X.J., *Regularity for Monge-Ampère equation near the boundary*, International Mathematical Journal of Analysis and its Applications **16** (1996), 101-107.
- [73] Wang X.J., *The k -Hessian Equation*. Lecture Notes in Mathematics v. 1977, 177–252, 2009.
- [74] Wolfson, J.G., *Minimal Lagrangian diffeomorphisms and the Monge-Ampère equation*, J. Diff. Geom. **46** (1997), 335-373.

Sébastien Basterrechea

Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne
Faculté des sciences de bases
EPFL-SB-MATHAA-CAA, Station 8
CH-1015 Lausanne

BIRTH : 13 June 1986
NATIONALITY : Swiss

TEL : +41 21 693 20 94

EMAIL : sebastien.basterrechea@epfl.ch

CURRENT POSITION

September 2011 – now

Doctoral Assistant, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

RESEARCH INTERESTS

Partial Differential Equations ; Functional Analysis.

PUBLICATION

Basterrechea S. and Dacorogna B., Existence of solutions for Jacobian and Hessian equations under smallness assumptions, *Numerical Functional Analysis and Optimization* 35 (2014), 868-892.

EDUCATION

2009 – 2011

MSc in Mathematics, EPFL

2006 – 2009

BSc in Mathematics, EPFL

2002 – 2006

Maturité fédérale, Lycée-Collège des Creusets, Sion

TEACHING

2011 – 2014

Analysis III and IV for mathematicians (teaching assistant)
Supervision of several semester projects

Spring 2010

Analysis II for civil and environmental engineers (teaching assistant)

Fall 2009

Mathematics and geometry I for architects (teaching assistant)
Mathematics I for biologists (teaching assistant)

Fall 2008

Analysis I for micro-engineers (teaching assistant)